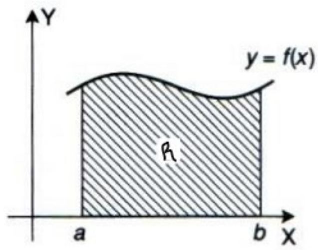
Aplicações da integral definida

Cálculo de áreas de regiões planas:

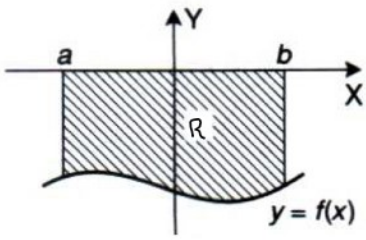
Caso I Cálculo da área da figura plana limitada pelo gráfico de f, pelas retas $x = a$, $x = b$ e o eixo dos x, onde f é contínua e $f(x) \geq 0$, $\forall\, x \in [a, b]$



Neste caso, a área é dada por:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx.$$

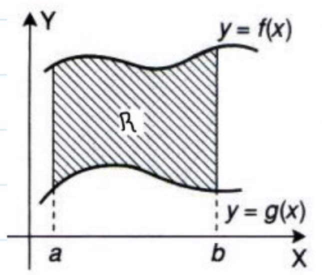
Caso II Cálculo da área da figura plana limitada pelo gráfico de f, pelas retas $x = a$, $x = b$ e o eixo x, onde f é contínua e $f(x) \leq 0$, $\forall\, x \in [a, b]$



Neste caso, a área é dada por:

$$A = \left| \int_a^b f(x)\,dx \right|.$$

Caso III Cálculo da área da figura plana limitada pelos gráficos de f e g, pelas retas $x = a$ e $x = b$, onde f e g são funções contínuas em $[a, b]$ e $f(x) \geq g(x), \forall\, x \in [a, b]$.

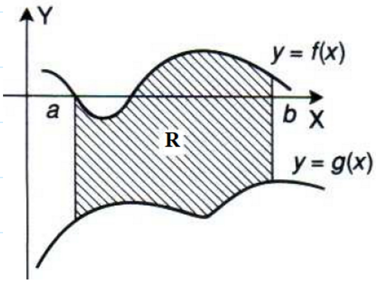


Neste caso, a área é dada por:

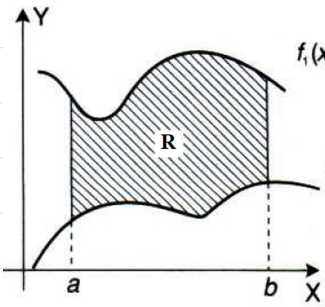
$$A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

$$= \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx.$$

Observação: Vale mesmo que f e g assumam valores negativos.



Basta imaginar o eixo dos x deslocado de tal maneira que as funções se tornem não-negativas, $\forall\, x \in [a, b]$.



$f_1(x) = f(x) + K$

$g_1(x) = g(x) + K$

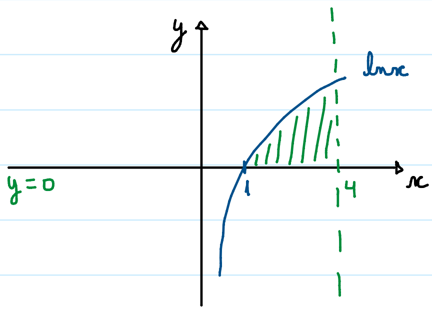
$$\int_a^b \left(f_1(x) - g_1(x)\right) dx$$

$$= \int_a^b \left(f(x) + K - (g(x) + K)\right) dx$$

$$= \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right) dx$$

Exercício: Calcular a área da região limitada pelas curvas dadas.

a) $y = 0$, $y = \ln x$ e $x = 4$



$$A = \int_1^4 \ln x \, dx$$

$$= x \ln x \Big|_1^4 - \int_1^4 x \cdot \frac{1}{x} \, dx$$

$$= 4 \ln 4 - \cancel{\ln 1}^{\,0} - \int_1^4 dx$$

$$= 4 \ln 4 - x \Big|_1^4$$

$$= 4 \ln 4 - (4 - 1)$$

$$= 4 . \ln 4 - 3$$

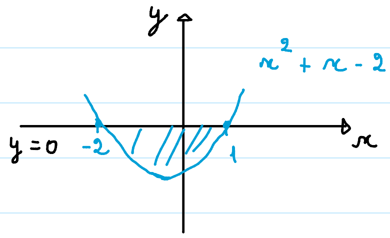
Integração por partes:

$$\int u \, dv = u . v - \int v \, du$$

$u = \ln x \qquad dv = 1 \, dx$

$du = \dfrac{1}{x} \qquad v = x$

b) $y = 0$ e $y = x^2 + x - 2$
$= (x+2)(x-1)$
$x = -2 \quad x = 1$



$$A = \left| \int_{-2}^{1} (x^2 + x - 2)\, dx \right| = \left| -\frac{9}{2} \right| = \frac{9}{2}$$

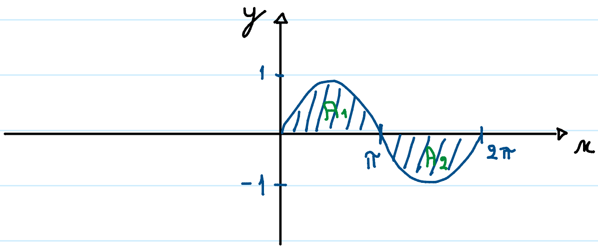
Calculando a integral:

$$\int_{-2}^{1} (x^2 + x - 2)\, dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x \right)_{-2}^{1}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 - \left(-\frac{8}{3} + \frac{4}{2} + 4 \right)$$

$$= -\frac{9}{2}$$

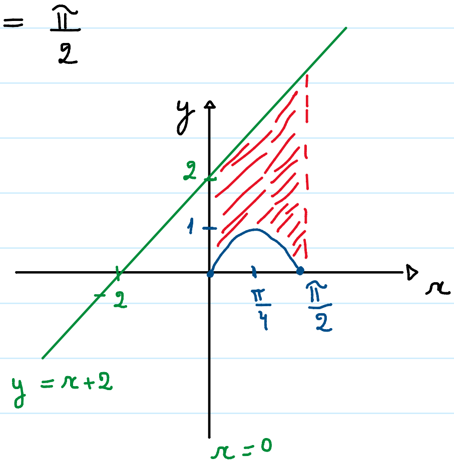
c) $y = \operatorname{sen} x \,,\; x = 0 \text{ e } x = 2\pi$



$$A = A_1 + A_2$$
$$= \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx + \left| \int_{\pi}^{2\pi} \operatorname{sen} x \, dx \right|$$
$$= -\cos x \Big|_0^{\pi} + \left| -\cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} \right|$$
$$= -\big((-1) - 1\big) + \big| -(1 - (-1)) \big|$$
$$= -(-2) + |-2|$$
$$= 2 + 2$$
$$= 4$$

d) $y = \operatorname{sen} 2x \,,\; y = x + 2 \,,\; x = 0 \text{ e } x = \frac{\pi}{2}$

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big((x+2) - \operatorname{sen} 2x \Big) dx$$



$$= \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \left(-\frac{1}{2} \cos 2x \right) \right] \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + 2x + \frac{1}{2} \cos 2x \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi^2}{8} + \pi - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\pi^2}{8} + \pi - 1$$

$\int \operatorname{sen} 2x \, dx$

Subs:

$u = 2x$

$du = 2\,dx$

$\frac{du}{2} = dx$

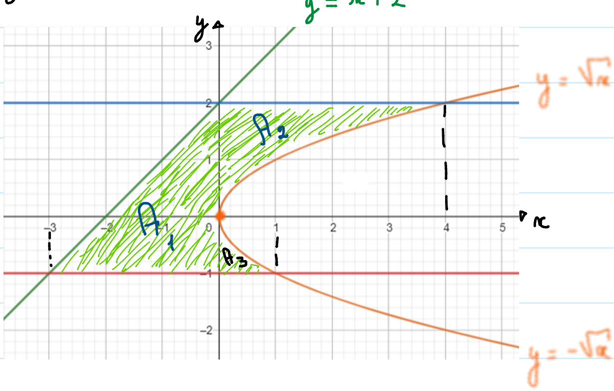
$= \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} u \, du$

$= -\frac{1}{2}\cos u + c$

$= -\frac{1}{2}\cos 2x + c$

e) $y = x+2$, $y = 2$, $y = -1$ e $x = y^2$ $\to y = \sqrt{x}$, $\to y = -\sqrt{x}$

$$A_T = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{15}{2}$$



Temos:

$$A_1 = \int_{-3}^{0} \left((x+2) - (-1) \right) dx$$

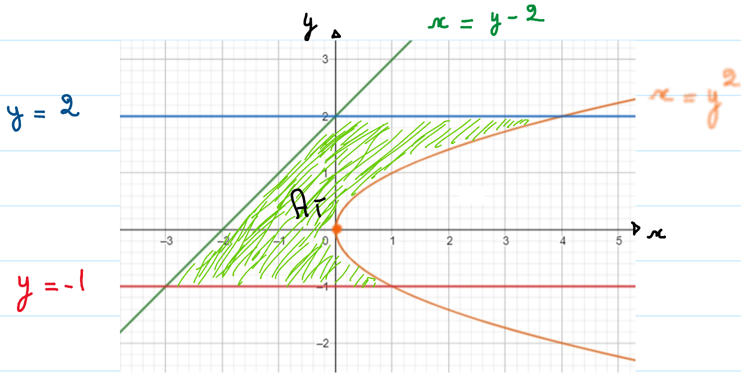
$$A_2 = \int_{0}^{4} \left(2 - \sqrt{x} \right) dx$$

$$A_3 = \int_{0}^{1} \left(-\sqrt{x} - (-1) \right) dx$$

Outra forma:

Escrever x em função de y

$$\begin{cases} x = y - 2 \\ x = y^2 \end{cases}, \quad -1 \leq y \leq 2$$



Assim,

$$A_T = \int_{-1}^{2} \left(y^2 - (y-2) \right) dy$$

$$= \left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} + 2y \right) \Bigg|_{-1}^{2}$$

$$= \frac{8}{3} - 2 + 4 - \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 2 \right)$$

$$= \frac{8}{3} + 2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 2$$

$$= \frac{16 + 12 + 2 + 3 + 12}{6}$$

$$= \frac{45}{6} \begin{matrix} :3 \\ :3 \end{matrix}$$

$$= \frac{15}{2}$$