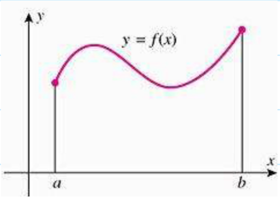
Aplicações da integral definida

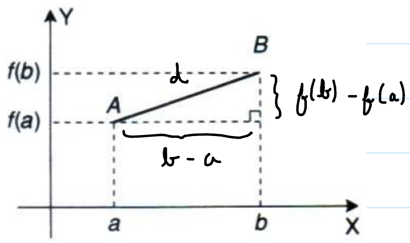
Comprimento de arco de curvas planas:

Problema: definir e obter uma fórmula para o comprimento de arco L de uma curva suave C definida pela equação y = f(x) no intervalo [a, b].



Intuitivamente, podemos pensar no comprimento de arco de uma curva como o número obtido ao colocar um pedaço de barbante sobre a curva e então medir o comprimento do barbante depois de espichado com uma régua. Mas isso pode ser difícil de ser feito com precisão, então precisamos de uma definição exata para o comprimento de arco de uma curva.

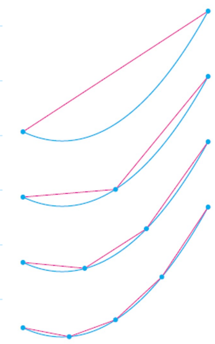
Se a curva é uma poligonal, isto é, formada por segmentos de reta, podemos facilmente encontrar seu comprimento, apenas somamos os comprimentos dos segmentos de reta que formam a poligonal (podemos usar a fórmula da distância para encontrar a distância entre as extremidades de cada segmento, veja o exemplo).



$$d^2(A,B) = (b-a)^2 + (f(b)-f(a))^2$$

$$d(A,B) = \sqrt{(b-a)^2 + (f(b)-f(a))^2}$$

Definimos o comprimento de uma curva qualquer primeiro aproximando-a por uma poligonal e, então, tomando o limite quando o número de segmentos da poligonal aumenta.



Implementando a ideia:

Obtemos uma poligonal de aproximação para C dividindo o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos com extremidades $x_0, x_1, \ldots, x_n$ e com larguras iguais a Δx. Se $y_i = f(x_i)$, então o ponto $P_i(x_i, y_i)$ está em C e a poligonal com vértices $P_0, P_1, \ldots, P_n$, ilustrada na Figura 3, é uma aproximação para C.

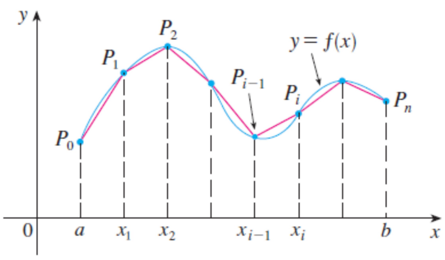


FIGURA 3

https://www.geogebra.org/m/wKyaGnhr

O comprimento da poligonal é dado por: $L_n = \sum_{i=1}^{n} d(P_i, P_{i-1})$

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}. \qquad (1)$$

Como f é derivável em $[a, b]$, podemos aplicar o Teorema do Valor Médio em cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, e escrever

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i)(x_i - x_{i-1}),$$

TVM

$$f'(c_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

onde c_i é um ponto do intervalo (x_{i-1}, x_i).
Substituindo este resultado em (1), obtemos:

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f'(c_i)]^2 (x_i - x_{i-1})^2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\,(x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\,\Delta x_i, \qquad (2)$$

onde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.
A soma que aparece em (2) é uma soma de Riemann da função

$$\sqrt{1 + [f'(x)]^2}.$$

Se fizermos $n \to +\infty$, o comprimento L_n da poligonal se aproxima cada vez mais do comprimento L do arco da curva. Então,

$$L = \lim_{n \to \infty} L_n$$

$$L = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\,\Delta x_i$$

$$= \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$$

Logo,

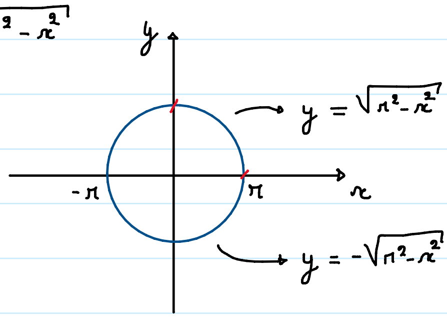
Fórmula do Comprimento do Arco Se f' for contínua em $[a, b]$, então o comprimento da curva $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, é

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$$

Exercício: Usando integral, calcule o comprimento da circunferência $x^2 + y^2 = r^2$.

$C = 4L$, L é o comprimento do arco do 1º quadrante

$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$



$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} = (r^2 - x^2)^{1/2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(r^2 - x^2)^{1/2 - 1} \cdot (-2x)$$

$$= -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

Substituindo na fórmula

$$L = \int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, dx$$

$$= \int_0^r \sqrt{\frac{r^2 - \cancel{x^2} + \cancel{x^2}}{r^2 - x^2}}\, dx$$

$$= \int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx$$

$$= r \int_0^r \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

Integral imprópria: $x = r$ é uma assíntota vertical da função $\frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}}$.

$$= r \lim_{t \to r^-} \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$= r \lim_{t \to r^-} \arcsin \frac{x}{r} \Big|_0^t$$

$$= r \lim_{t \to r^-} \arcsin \left(\cancel{\frac{t}{r}}^{\,1}\right) - \cancel{\arcsin 0}^{\,0}$$

$$= r \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi}{2} r$$

Assim,

$$C = 4 \cdot \frac{\pi}{2} r = 2\pi r$$

//

Observação:

Podem ocorrer situações em que a curva C é dada por $x = g(y)$, em vez de $y = f(x)$. Neste caso, o comprimento do arco da curva C de $A(g(c), c)$ até $B(g(d), d)$, é dado por:

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2}\, dy$$