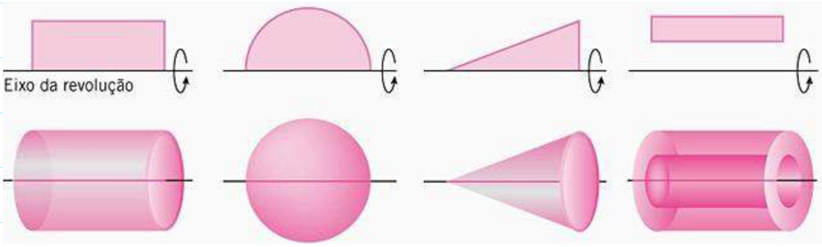
Aplicações da integral definida

Volume de um sólido de revolução:

Sólido de revolução: fazendo uma região plana girar em torno de uma reta no plano, obtemos um sólido, que é chamado de sólido de revolução. A reta ao redor da qual a região gira é chamada de *eixo de revolução.*

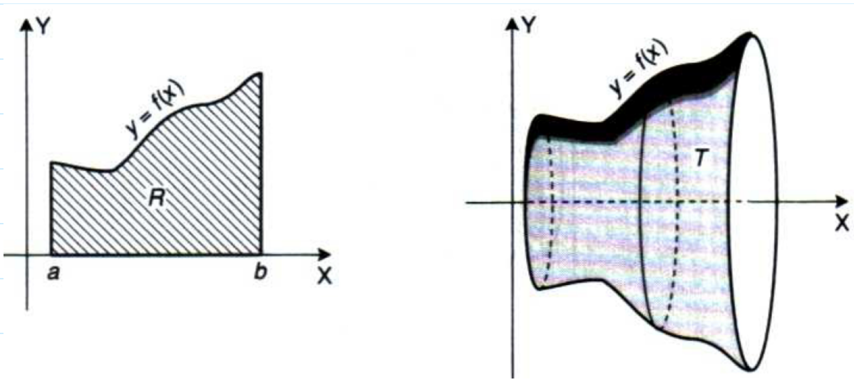


Cilindro circular reto | Esfera sólida | Cone sólido | Cone circular reto oco

$V = A_b \cdot h$ | $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ | $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ | $V = V_{externo} - V_{interno}$

$V = \pi r^2 h$

Problema: Seja f contínua e não negativa em [*a*, *b*] e R a região limitada a cima por y = f(x), abaixo pelo eixo x e nas laterais pelas retas x = *a* e x = *b*. Calcular o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da região R em torno do eixo x.



Dedução da fórmula:

Suponhamos que $f(x)$ é contínua e não negativa em $[a, b]$.
Consideremos uma partição P de $[a, b]$, dada por:

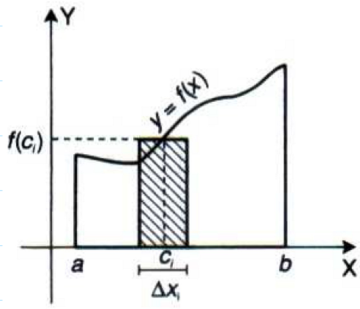
$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b.$$

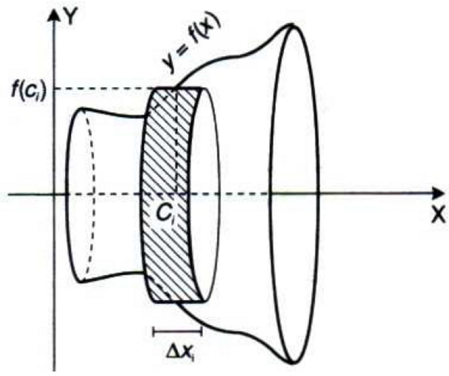
Seja $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ o comprimento do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

Em cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, escolhemos um ponto qualquer c_i.

Para cada i, $i = 1, \dots, n$, construimos um retângulo R_i, de base Δx_i e altura $f(c_i)$. Fazendo cada retângulo R_i girar em torno do eixo dos x, o sólido de revolução obtido é um cilindro, cujo volume é dado por:

$$\pi[f(c_i)]^2 \Delta x_i.$$



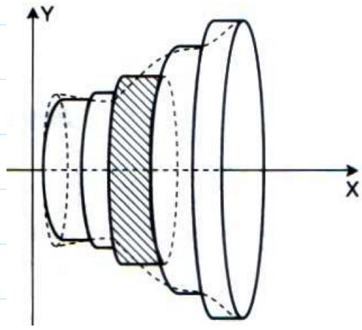


A soma dos volumes dos n cilindros, que representamos por V_n, é dada por:

$$V_n = \pi[f(c_1)]^2\Delta x_1 + \pi[f(c_2)]^2\Delta x_2 + \ldots + \pi[f(c_n)]^2\Delta x_n$$

$$= \pi\sum_{i=1}^{n}[f(c_i)]^2\Delta x_i,$$

e nos dá uma aproximação do volume do sólido .



Podemos observar que à medida que n cresce muito e cada Δx_i, $i = 1, \ldots, n$, torna-se muito pequeno, a soma dos volumes dos n cilindros aproxima-se do que, intuitivamente, entendemos como o volume do sólido T.

Então,

$$V = \lim_{n \to \infty} V_n$$

$$= \lim_{n \to \infty} \pi \sum_{i=1}^{n} [f(x)]^2 \Delta x_i$$

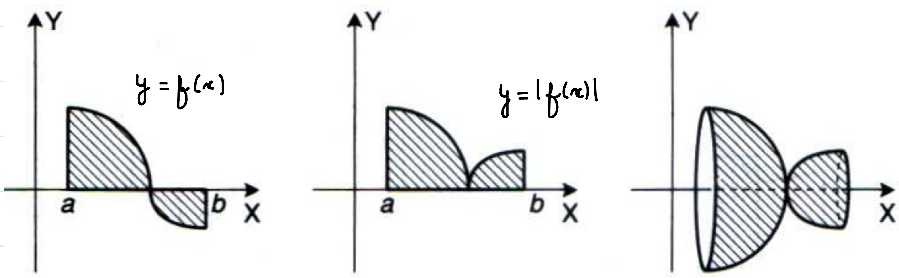
$$= \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

Definimos o volume do sólido de revolução, gerado pela rotação em torno do eixo x da região sob o gráfico da f de a até b, por

$$\boxed{V = \pi\int_a^b [f(x)]^2 dx}$$

Observação: a fórmula pode ser generalizada para outras situações:

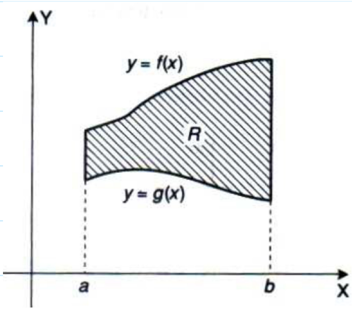
1) A função é negativa em alguns pontos de [a, b].



O sólido gerado pela rotação em torno do eixo x, da região sob o gráfico de f(x), coincide com o sólido gerado pela rotação em torno do eixo x, da região sob o gráfico de |f(x)|.
Como $|f(x)|^2 = (f(x))^2$, a fórmula permanece a mesma.

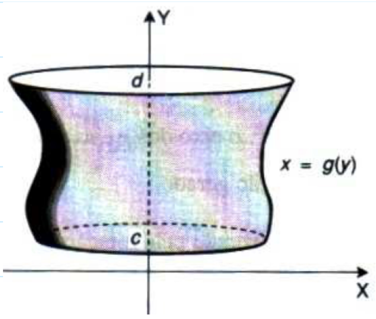
$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

2) A região R está entre os gráficos de duas funções f(x) e g(x) de *a* até *b*, com f(x) ≥ g(x), para todo x ∈ [*a*, *b*].



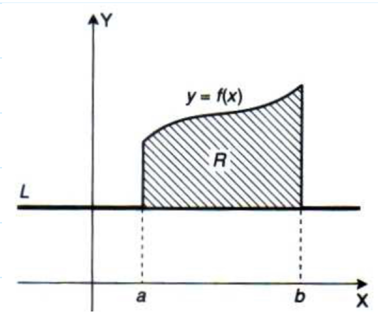
$$V = \pi \int_a^b \left([f(x)]^2 - [g(x)]^2\right) dx.$$

3) A região gira em torno do eixo y.



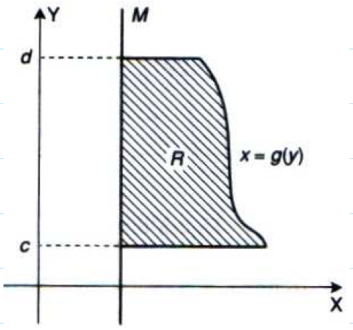
$$V = \pi \int_c^d [g(y)]^2 dy.$$

4) A região gira em torno da reta y = L.



$$V = \pi \int_a^b [f(x) - L]^2 dx.$$

5) A região gira em torno da reta x = M.



$$V = \pi \int_c^d [g(y) - M]^2 dy.$$

Exemplos:

1) A região delimitada pela curva $y = x^2$, o eixo x e as retas x =1 e x = 2 sofre uma rotação em torno do eixo x. Encontre o volume do sólido de revolução gerado.

$$V = \pi \int_1^2 (x^2)^2 \, dx$$

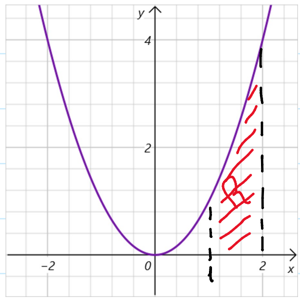
$$= \pi \int_1^2 x^4 \, dx$$

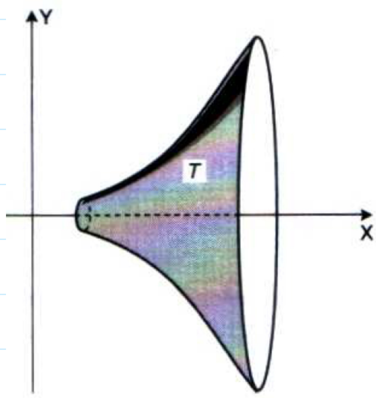
$$= \pi \left. \frac{x^5}{5} \right|_1^2$$

$$= \pi \left(\frac{2^5}{5} - \frac{1}{5} \right)$$

$$= \pi \left(\frac{32}{5} - \frac{1}{5} \right)$$

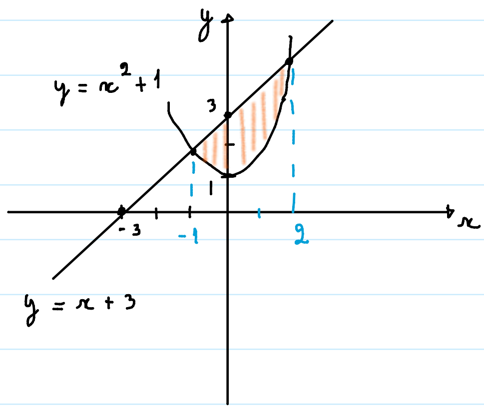
$$= \frac{31}{5} \pi$$





2) Escreva a integral que fornece o volume do sólido gerado pela rotação em torno do eixo x da região limitada pela parábola $y = x^2 + 1$ e a reta $y = x + 3$.

$$V = \pi \int_{-1}^{2} \left[(x+3)^2 - (x^2+1)^2 \right] dx = \frac{117}{5} \pi$$

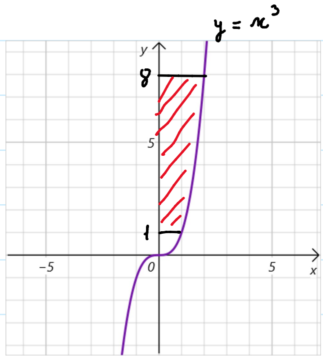


Interseção entre as curvas:

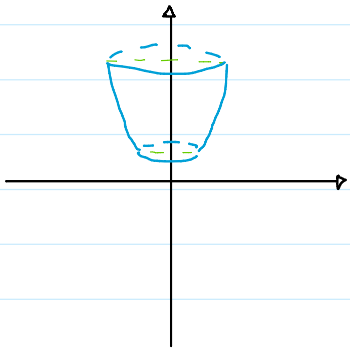
$$\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = x + 3 \end{cases}$$

$$x^2 + 1 = x + 3$$
$$x^2 - x - 2 = 0$$
$$(x - 2)(x + 1) = 0$$
$$x = 2 \quad e \quad x = -1$$

3) Faz-se girar em torno do eixo y a região delimitada pelo referido eixo e pelos gráficos de $y = x^3$, $y = 1$ e $y = 8$.

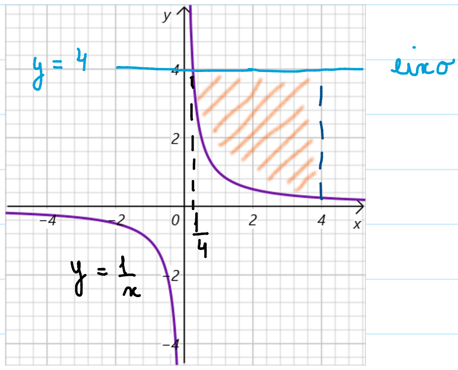


$$y = x^3$$
$$x = \sqrt[3]{y}$$



$$V = \pi \int_1^8 (\sqrt[3]{y})^2 \, dy$$
$$= \pi \int_1^8 y^{\frac{2}{3}} \, dy$$
$$= \frac{93}{5} \pi$$

4) Determinar o volume do sólido gerado pela rotação em torno da reta $y = 4$ da região delimitada por $y = 1/x$, $y = 4$ e $x = 4$.

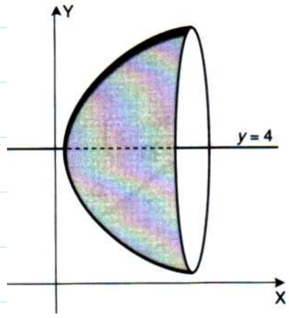


$$V = \pi \int_{\frac{1}{4}}^{4} \left(\frac{1}{x} - 4\right)^2 dx$$
$$= \pi \int_{\frac{1}{4}}^{4} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{8}{x} + 16\right) dx$$
$$= \pi \left[\frac{255}{4} - 8 \ln 16\right]$$

Interseção:

$$\begin{cases} y = 4 \\ y = \dfrac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x} = 4$$

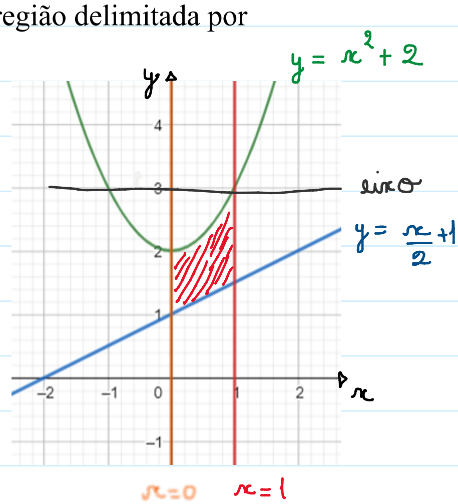
$$x = \frac{1}{4}$$



5) Determinar o volume do sólido gerado pela rotação em torno da reta y = 3 da região delimitada por y = x² + 2, y = x/2 + 1, x = 0 e x = 1.

$$V = \pi \int_0^1 \left[\left(\frac{x}{2} + 1 - 3 \right)^2 - \left(x^2 + 2 - 3 \right)^2 \right] dx$$

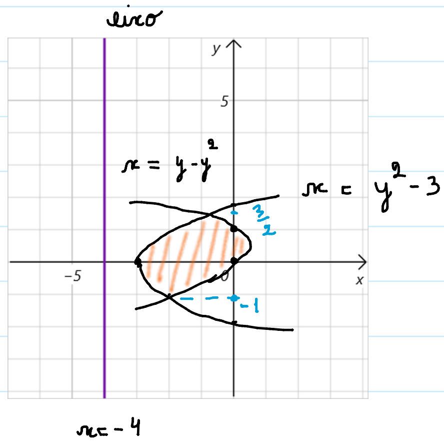
$$= \frac{51}{20} \pi$$



6) Encontrar o volume do sólido gerado pela rotação em torno da reta x = - 4 da região delimitada por x = y² - 3, x = y - y².

$$V = \pi \int_{-1}^{\frac{3}{2}} \left[\left(y - y^2 - (-4) \right)^2 - \left(y^2 - 3 - (-4) \right)^2 \right] dy$$

$$= \frac{875}{2} \pi$$



Interseção entre as curvas:

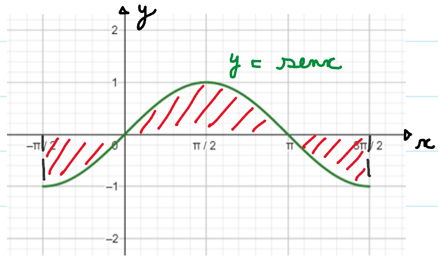
$$\begin{cases} x = y^2 - 3 \\ x = y - y^2 \end{cases}$$

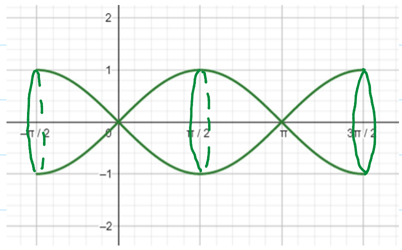
$$y^2 - 3 = y - y^2$$

$$2y^2 - y - 3 = 0$$

$$y = -1 \text{ e } y = \frac{3}{2}$$

7) Calcular o volume do sólido gerado pela rotação em torno do eixo x da região entre o gráfico da função y = sen x e o eixo x, de $-\frac{\pi}{2}$ até $\frac{3\pi}{2}$.





$$V = \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} sen^2 x \, dx$$

$$= \pi \left(\frac{1}{2} x - \frac{1}{4} sen\, 2x \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}$$

$$= \pi \left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= \pi^2$$

Calculando separadamente a integral indefinida:

$$\int sen^2 x \, dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx$$

Subs:

$u = 2x$

$du = 2dx$

$\frac{du}{2} = dx$

$$= \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx$$

$$= \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \int \frac{\cos u \, du}{2}$$

$$= \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} sen\, u + c$$

$$= \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} sen\, 2x + c$$