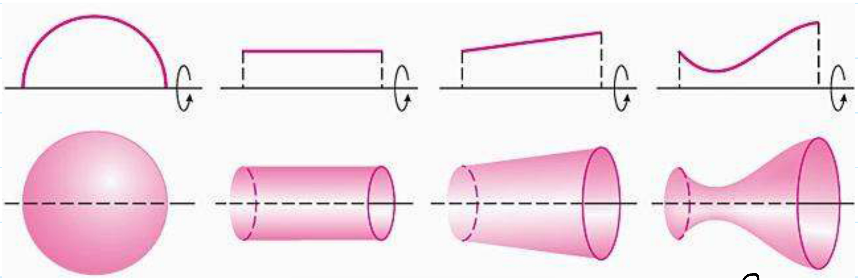
Aplicações da integral definida

Área de uma superfície de revolução:

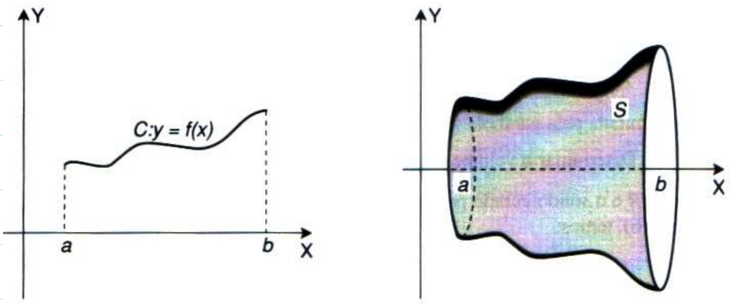
Superfície de revolução: fazendo uma curva plana girar em torno de uma reta no plano, obtemos uma superfície, que é chamada de superfície de revolução. Essa superfície é a fronteira lateral de um sólido de revolução.
A reta ao redor da qual a curva gira é chamada de *eixo de revolução.*



Esfera | Cilindro circular reto | Tronco de cone | ?

$S = 4\pi r^2$ $\quad$ $S = 2\pi r h$ $\quad$ $S = \pi(r_1 + r_2)\ell$

Problema: Seja f suave e não negativa em [*a*, *b*]. Calcular a área da superfície de revolução gerada pela rotação, em torno do eixo x, da curva C de equação y = f(x) no intervalo [a, b].



Dedução da fórmula:

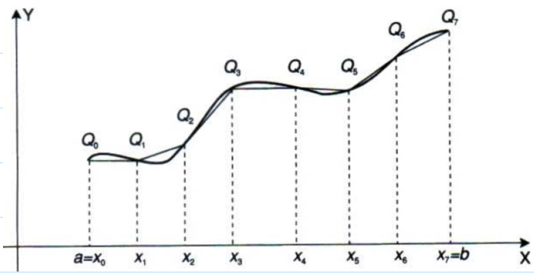
Vamos supor que $f(x) \geq 0$, para todo $x \in [a, b]$, e que f é uma função derivável em $[a, b]$.

Como fizemos para o cálculo do volume de um sólido de revolução, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos através dos pontos:

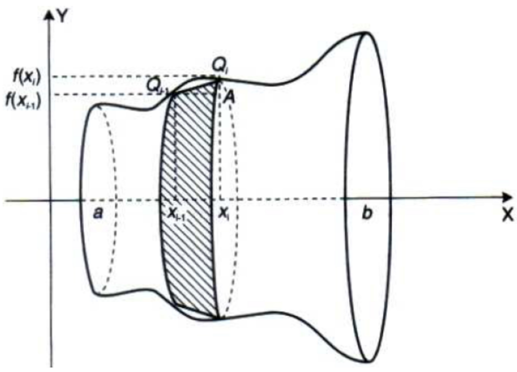
$$a = x_0 < x_1 < ... < x_{i-1} < x_i < ... < x_n = b.$$

Sejam $Q_0, Q_1, ..., Q_n$ os correspondentes pontos sobre a curva C. Unindo os pontos $Q_0, Q_1, ..., Q_n$, obtemos uma linha poligonal que aproxima a curva C.

A figura ilustra uma poligonal para n = 7.

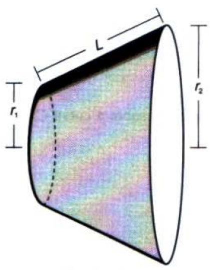


Fazendo cada segmento de reta desta linha poligonal girar em torno do eixo dos x, a superfície de revolução obtida é um tronco de cone.



Da geometria elementar, sabemos que a área lateral do tronco de cone é dada por:

$A = \pi(r_1 + r_2)L,$



onde r_1 é o raio da base menor, r_2 é o raio da base maior e L é o comprimento da geratriz do tronco de cone

Ou, A = $2\pi r L$, onde r = $\frac{r_1+r_2}{2}$ é o raio médio do tronco.

Portanto, a área lateral do tronco de cone que visualizamos é dada por:

$$A_i = 2\pi \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2} |Q_{i-1} - Q_i|$$

Como na demonstração do comprimento de arco de uma curva plana, temos

$$|Q_{i-1} - Q_i| = \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\Delta x_i, \quad \text{onde } c_i \in [x_{i-1}\,,\, x_i]$$

Quando Δx_i é pequeno temos que $f(x_i) \approx f(c_i)$ e também $f(x_{i-1}) \approx f(c_i)$ pois f é contínua.

Segue que,

$$\begin{aligned} A_i &\approx 2\pi \frac{f(c_i) + f(c_i\,)}{2} \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\Delta x_i \\ &= 2\pi f(c_i)\sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\Delta x_i, \end{aligned}$$

então uma aproximação para a área da superfície é

$$A_n \approx \sum_{i=1}^{n} 2\pi f(c_i)\sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\Delta x_i.$$

(Soma das áreas laterais de todos os troncos de cone gerados pela rotação dos segmentos que compõe a poligonal.)

Podemos observar que, quando n cresce muito e cada Δx_i torna-se muito pequeno, a soma das áreas laterais dos n troncos de cone aproxima-se do que, intuitivamente, entendemos como a área da superfície S.

Então,

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi f(c_i)\sqrt{1+[f'(c_i)]^2}\,\Delta x_i$$

$$= 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

Definimos a área da superfície de revolução, obtida pela rotação em torno do eixo x da curva suave y = f(x) de a até b, por

$$\boxed{A = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx}$$

Observações:

1) Se f não for necessariamente positiva, então:

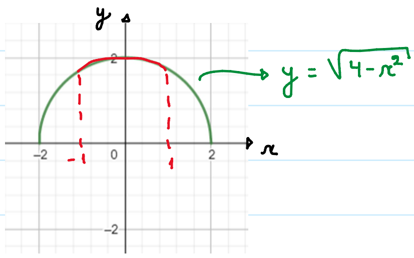
$$A = \int_a^b 2\pi |f(x)|\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

2) Se considerarmos a curva x = g(y), y ∈ [c, d], girando em torno do eixo y, então:

$$A = \int_c^d 2\pi g(y)\sqrt{1+[g'(y)]^2}\,dy$$

Exercícios:

1) Calcular a área da superfície obtida pela rotação da curva y = $\sqrt{4-x^2}$, com -1 ≤ x ≤ 1, em torno do eixo x.



$$y = \sqrt{4-x^2}$$

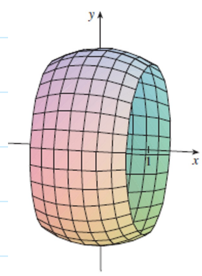
$$y' = \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{4-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$A = 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{4-x^2}\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{4-x^2}}\,dx$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{1} \cancel{\sqrt{4-x^2}}\cdot\sqrt{\frac{4-\cancel{x^2}+\cancel{x^2}}{\cancel{4-x^2}}}\,dx$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{1} 2\,dx$$

$$= 4\pi \int_{-1}^{1} dx$$



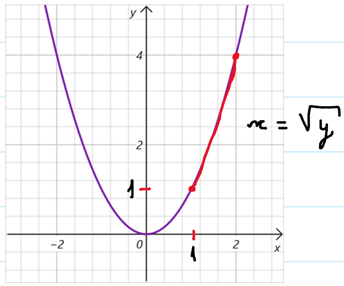
$$= 4\pi x \Big|_{-1}^{1}$$

$$= 4\pi - (-4\pi)$$

$$= 4\pi + 4\pi$$

$$= 8\pi$$

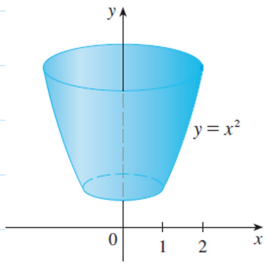
2) O arco da parábola $y = x^2$ de (1, 1) a (2, 4) é girado em torno do eixo y. Encontre a área da superfície resultante.



$y = x^2$ $\qquad\qquad x' = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$

$x = \sqrt{y}$

$$A = 2\pi \int_1^4 \sqrt{y} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4y}}\, dy$$



$$= 2\pi \int_1^4 \sqrt{y} \cdot \sqrt{\frac{4y+1}{4y}}\, dy$$

$$= 2\pi \int_1^4 \cancel{\sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{4y+1}}{\sqrt{4} \cdot \cancel{\sqrt{y}}}\, dy$$

$$= \frac{2\pi}{2} \int_1^4 \sqrt{4y+1}\, dy$$

Subs:

$u = 4y + 1$ $\qquad$ se $y = 1 \Rightarrow u = 5$

$du = 4\, dy$ $\qquad$ se $y = 4 \Rightarrow u = 17$

$\dfrac{du}{4} = dy$

$$= \pi \int_5^{17} \sqrt{u}\, \frac{du}{4}$$

$$= \frac{\pi}{4} \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \Bigg|_5^{17}$$

$$= \frac{\pi}{\cancel{4}_{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{3} \sqrt{u^3} \Bigg|_5^{17}$$

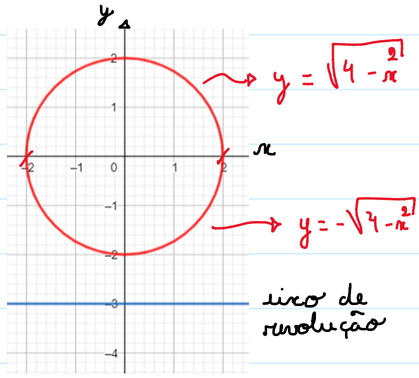
$$= \frac{\pi}{6} \left(\sqrt{17^3} - \sqrt{5^3} \right)$$

$$= \frac{\pi}{6} \left(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5} \right)$$

3) Encontre a área da superfície gerada pela rotação da região limitada por $x^2 + y^2 = 4$ em torno da reta $y = -3$.

$$y = \sqrt{4-x^2} + 3 \quad e \quad y = -\sqrt{4-x^2} + 3$$

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}} \qquad y' = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$$

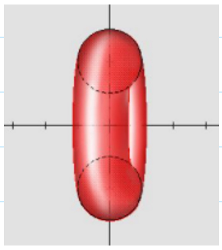


$$A = 2\pi \int_{-2}^{2} \left(\sqrt{4-x^2} + 3\right) \sqrt{1 + \frac{x^2}{4-x^2}}\, dx$$

$$+ 2\pi \int_{-2}^{2} \left(-\sqrt{4-x^2} + 3\right) \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{4-x^2}}\, dx$$

$$= 2\pi \int_{-2}^{2} \left(\sqrt{4-x^2} + 3\right) \cdot \sqrt{\frac{4}{4-x^2}}\, dx$$

$$+ 2\pi \int_{-2}^{2} \left(-\sqrt{4-x^2} + 3\right) \cdot \sqrt{\frac{4}{4-x^2}}\, dx$$



Toro

$$= 2\pi \int_{-2}^{2} \left(2 + \frac{6}{\sqrt{4-x^2}}\right) dx$$

$$+ 2\pi \int_{-2}^{2} \left(-2 + \frac{6}{\sqrt{4-x^2}}\right) dx$$

Rosquinha

$$= 2\pi \int_{-2}^{2} \frac{12}{\sqrt{4-x^2}}\, dx$$

Câmara de ar

$$= 24\pi \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{2}\right) \Big|_{-2}^{2}$$

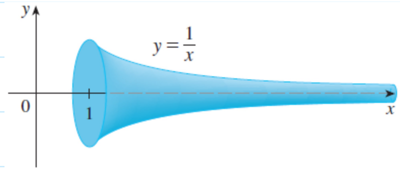
$$= 24\pi \left(\operatorname{arc\,sen} 1 - \operatorname{arc\,sen}(-1)\right)$$

$$= 24\pi \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$= 24\pi^2$$

O domínio do arc sen x é $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

4) Se a região R = {(x, y) / x ≥ 1, 0 ≤ y ≤ 1/x} é girada em torno do eixo x, o volume do sólido resultante é finito, mas a área da superfície é infinita. Verifique essas informações, efetuando o cálculo do volume e da área. (A superfície é conhecida como Trombeta de Gabriel.)



$$V = \pi \int_1^\infty \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx$$

$$= \pi \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\, dx$$

$$= \pi \lim_{t \to \infty} \int_1^t \frac{1}{x^2}\, dx$$

$$= \pi \lim_{t \to \infty} \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^t$$

$$= \pi \lim_{t \to \infty} \left(\underbrace{-\frac{1}{t}}_{\to 0} - \left(-\frac{1}{1}\right)\right)$$

$$= \pi$$

$$\boxed{y = \frac{1}{x} \Rightarrow y' = -\frac{1}{x^2}}$$

$$A = 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x} \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{x^2}\right)^2}\, dx$$

$$= 2\pi \int_1^\infty \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3}\, dx$$

$$= 2\pi \lim_{t \to \infty} \int_1^t \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3}\, dx$$

Resolvendo separadamente a integral:

$$\int \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3}\, dx =$$

$$= \frac{-1}{2x^2\sqrt{x^4+1}} + \int \frac{x}{\sqrt{x^4+1}}\, dx$$

$$= \frac{-1}{2x^2\sqrt{x^4+1}} + \frac{1}{2} \underbrace{\int \frac{1}{\sqrt{w^2+1}}\, dw}_{\text{tabela}}$$

$$= -\frac{1}{2x^2 \cdot \sqrt{x^4+1}} + \frac{1}{2} \ln\left|x^2 + \sqrt{x^4+1}\right| + C$$

Integração por partes:

$$u = \sqrt{x^4+1} \qquad dv = \frac{1}{x^3}\, dx$$

$$du = \frac{2x^3}{\sqrt{x^4+1}}\, dx \qquad v = -\frac{1}{2x^2}$$

Subs:

$$w = x^2 \qquad dw = 2x\, dx$$

$$\frac{dw}{2} = x\, dx$$

Segue que:

$$A = 2\pi \lim_{t \to \infty} \left(-\frac{1}{2x^2 \cdot \sqrt{x^4+1}} + \frac{1}{2} \ln\left| x^2 + \sqrt{x^4+1} \right| \right) \Bigg|_1^t$$

$$= 2\pi \lim_{t \to \infty} \left[\left(\underbrace{-\frac{1}{2t^2 \sqrt{t^4+1}}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{1}{2} \ln\left| t^2 + \sqrt{t^4+1} \right|}_{\to \infty} \right) - \underbrace{\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \ln\left|1+\sqrt{2}\right| \right)}_{\text{constante}} \right]$$

$$= \infty$$