Lista de exercícios 5 – Funções de várias variáveis

1) Escreva a função de várias variáveis que fornece:

a) O volume de água necessário para encher uma piscina redonda de *x* metros de raio e *y* metros de altura.

b) A quantidade de rodapé, em metros, necessária para se colocar numa sala retangular de largura *a* e comprimento *b*.

c) A quantidade, em metros quadrados, de papel de parede necessária para revestir as paredes laterais de um quarto retangular de *x* metros de largura, *y* metros de comprimento e *z* metros de altura.

d) A temperatura nos pontos de uma esfera, se em qualquer ponto P(*x*, *y*, *z*) da esfera, a temperatura é numericamente igual a distância do ponto ao centro $C(x_0, y_0, z_0)$ da esfera.

e) O comprimento de uma escada apoiada em uma parede a *h* metros de altura, sendo que o pé da escada encontrasse a *L* metros da parede.

---

2) O *índice I de temperatura-umidade* (ou simplesmente *humidex*) é a temperatura aparente do ar quando a temperatura real é T e a umidade relativa é h, de modo que podemos escrever $I = f(T, h)$. A tabela seguinte com valores de I foi extraída de uma tabela do Environment Canada.

Temperatura aparente como função da temperatura e da umidade

Umidade relativa(%)

Temperatura real (°C) T \ h	20	30	40	50	60	70
20	20	20	20	21	22	23
25	25	25	26	28	30	32
30	30	31	34	36	38	41
35	36	39	42	45	48	51
40	43	47	51	55	59	63

(a) Qual é o valor de $f(35, 60)$? Qual é o seu significado?
(b) Para que valor de h temos $f(30, h) = 36$?
(c) Para que valor de T temos $f(T, 40) = 42$?
(d) Quais são os significados das funções $I = f(20, h)$ e $I = f(40, h)$? Compare o comportamento dessas duas funções de h.

---

3) Um fabricante modelou sua função P da produção anual (o valor monetário de toda a produção em milhões de dólares) como uma função de Cobb-Douglas

$$P(L, K) = 1{,}47L^{0{,}65}K^{0{,}35}$$

onde L é o número de horas trabalhadas (em milhares) e K é o capital investido (em milhões de dólares). Encontre $P(120, 20)$ e interprete-o.

4) Seja $g(x, y) = \cos(x + 2y)$.

(a) Calcule $g(2, -1)$.

(b) Determine o domínio de g.

(c) Determine a imagem de g.

---

5) Seja $f(x, y, z) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} + \ln(4 - x^2 - y^2 - z^2)$.

(a) Calcule $f(1, 1, 1)$.

(b) Encontre e faça um esboço do domínio de f .

---

6) Encontre e esboce o domínio das funções abaixo.

a) $f(x,y) = \sqrt{x+y}$

b) $f(x,y) = \ln(9 - x^2 - 9y^2)$

c) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-y^2}$

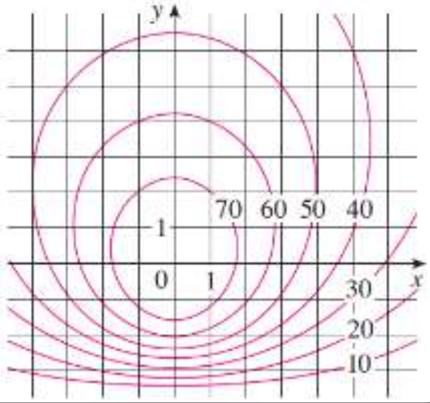
d) $f(x,y) = \frac{\sqrt{y-x^2}}{1-x^2}$

---

7) Um mapa de contorno de uma função f é apresentado abaixo.

a) Use-o para estimar os valores de $f(-1,2)$ e $f(2,-1)$.

b) Se esse fosse um mapa topográfico de uma região montanhosa. Como poderíamos descrever o terreno perto do ponto (0, -5/2)? E perto do ponto (4, 5)?



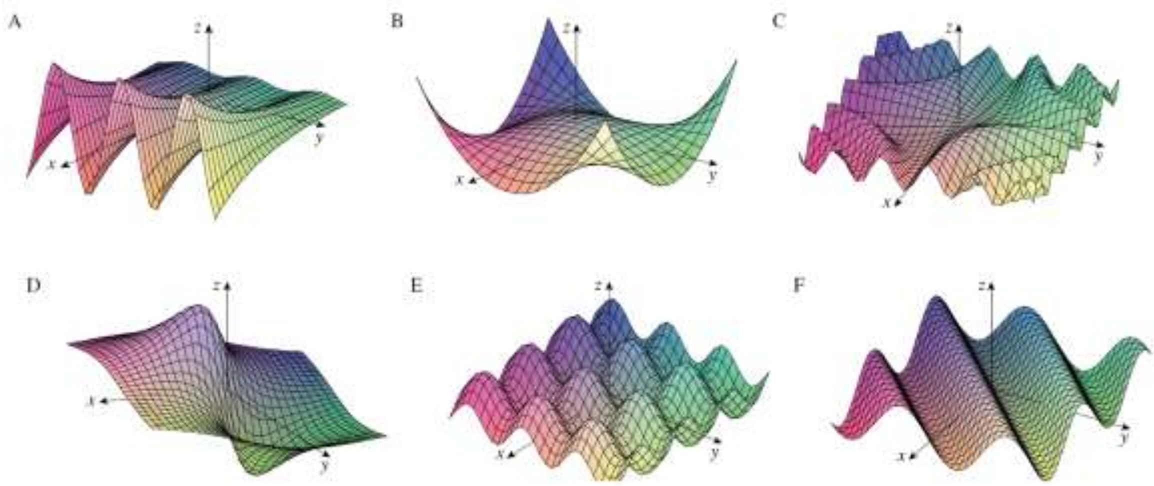
---

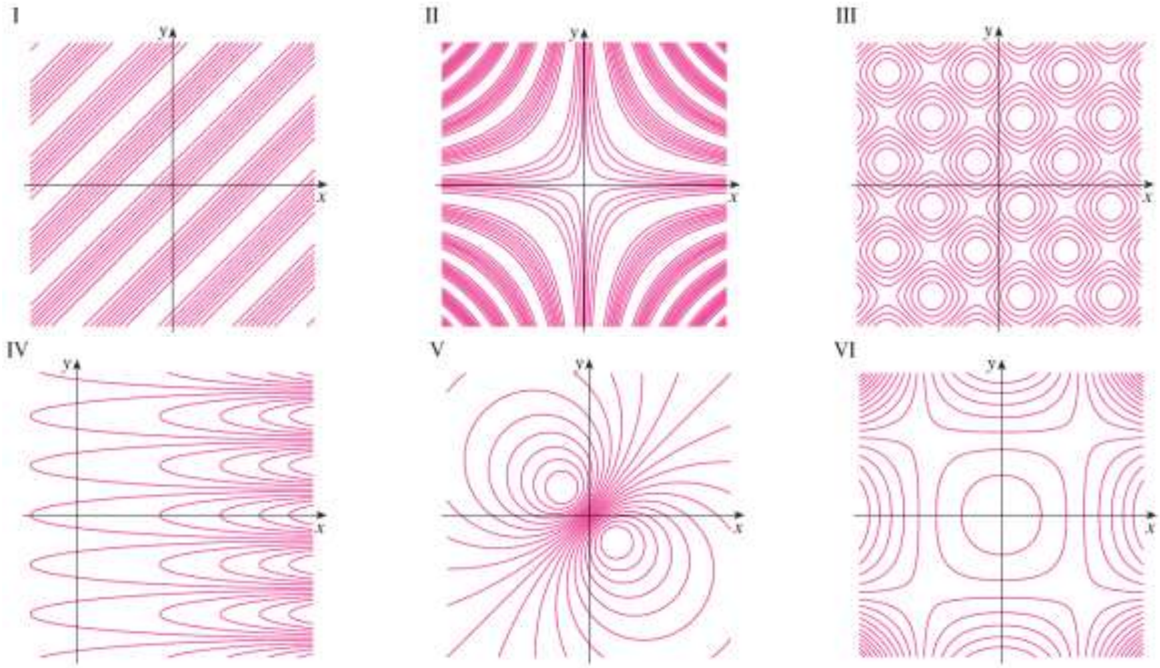
8) Com o auxílio do Geogebra, associe cada função ao seu gráfico e a suas curvas de nível.

a) $z = \sin(xy)$ b) $z = e^x \cos y$

c) $z = \sin(x - y)$ d) $z = \sin x - \sin y$

e) $z = (1 - x^2)(1 - y^2)$ f) $z = \frac{x-y}{1+x^2+y^2}$





9) Esboce as curvas de nível $f(x, y) = k$ no mesmo sistema de coordenadas cartesianas para os valores de k dados.

a) $f(x, y) = x + y - 1$, $k = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$

b) $f(x, y) = xy$, $k = -9, -4, -1, 0, 1, 2, 3$

10) Esboce o gráfico das seguintes funções, analisando as curvas de nível e as interseções com os eixos coordenados.

a) $f(x, y) = y^2$

b) $f(x, y) = x^2 + y^2$

c) $f(x, y) = 4x^2 + y^2$

d) $f(x, y) = 1 - |y|$

11) Calcular os seguintes limites:

a) $\lim_{(x,y)\to(1,2)} \ln\left[\dfrac{xy-1}{2xy+4}\right]$ b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\,\mathrm{sen}\dfrac{1}{y}$

c) $\lim_{(x,y)\to(2,1)} \dfrac{4 - xy}{x^2 + 3y^2}$ d) $\lim_{\substack{x\to1\\y\to2}} (e^{xy} - e^{y} + 1)$

e) $\lim_{\substack{x\to0\\y\to1}} \dfrac{y\,\mathrm{sen}\,x}{xy + 2x}$ f) $\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} \dfrac{e^{xy} - 1}{xy}$

(Dica: lembre dos limites fundamentais.)

g) $\lim_{\substack{x\to1\\y\to-1}} \dfrac{x^3 - xy^2}{x + y}$

12) Mostre que os limites seguintes não existem. Dica: considere caminhos de aproximação diferentes.

a) $\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} \dfrac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ b) $\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} \dfrac{x - y}{2x + y}$

13) Verifique se as funções dadas são contínuas nos pontos indicados.

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - yx}{x^2 - y^2}, & x \neq \pm y \\ \dfrac{1}{4}(x+y), & x = \pm y \end{cases}$, $P(1,1)$

b) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$, $P(0,0)$

c) $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2-1}{x+y}$, $P(1,1)$ e $Q(0,0)$

14) Calcular o valor de a para que a função seja contínua em (0,0), sendo

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{\sqrt{y^2+1}-1}, & (x,y)\neq(0,0)\\ a-4, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(Dica: para acabar com a indeterminação, multiplique pelo conjugado.)

Respostas:

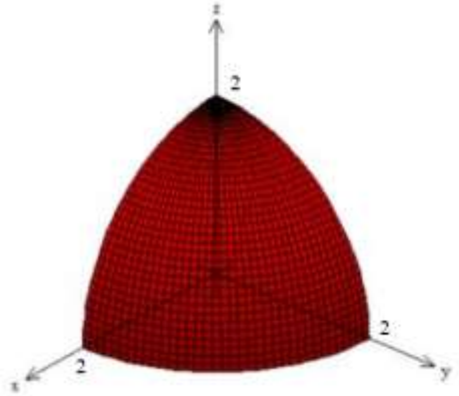
1) a) $V(x,y)=\pi x^2 y$
b) $f(a,b)=2a+2b$
c) $f(x,y,z)=2xz+2yz$
d) $T(x,y,z)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$
e) $C(h,l)=\sqrt{h^2+l^2}$

2) a) 48. É a temperatura aparente quando a temperatura real for 35°C em um local onde a umidade relativa do ar for de 70%.
b) 50.
c) 35.
d) A primeira função fornece a temperatura aparente quando a temperatura real for 20°C a medida que variamos a umidade do ar. Na segunda, temos a temperatura aparente quando a temperatura real for 40°C a medida que variamos a umidade do ar. Perceba que, na primeira função a variação da temperatura aparente é menor do que na segunda função, ou seja, na segunda função a temperatura aparente cresce mais rapidamente quanto maior for índice de umidade do ar.

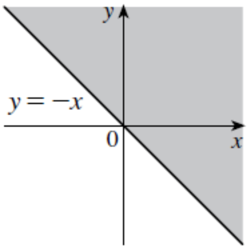
3) $\approx 94{,}2$; a produção anual do fabricante está avaliada em \$94,2 milhões quando 120 000 horas trabalhadas são gastas e \$20 milhões de capital são investidos.

4) (a) 1 (b) $\mathbb{R}^2$ (c) $[-1, 1]$

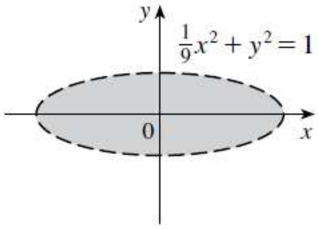
5) a) $f(1,1,1)=3$
b) $D(f)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x^2+y^2+z^2<4,\ x\geq 0, y\geq 0\ e\ z\geq 0\}$
Interior da esfera de raio 2, centrada na origem, no primeiro octante.



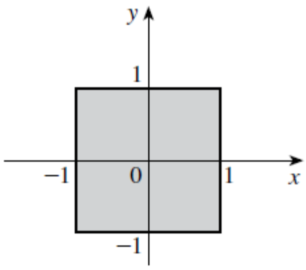
6) a) $\{(x, y) \mid y \geqslant -x\}$



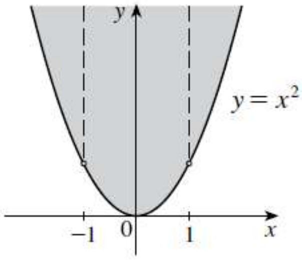
b) $\{(x, y) \mid \frac{1}{9}x^2 + y^2 < 1\}$



c) $\{(x, y) \mid -1 \leqslant x \leqslant 1,\ -1 \leqslant y \leqslant 1\}$



d) $\{(x, y) \mid y \geqslant x^2,\ x \neq \pm 1\}$



---

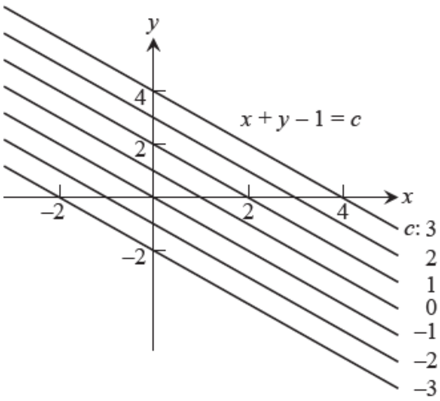
7) a) Aproximadamente 70 e 60.
b) Íngreme; Achatado.

---

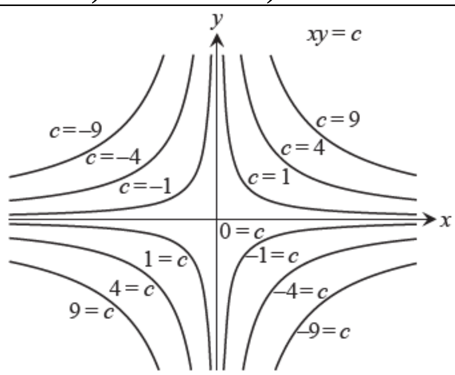
8) a) C-II b) A-IV c) F-I d) E-III e) B-VI f) D-V

---

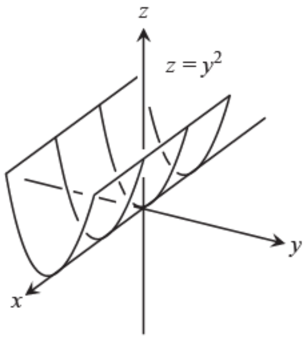
9) a)

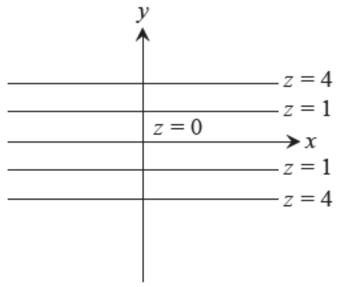


b)

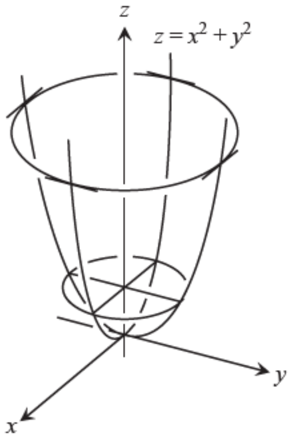


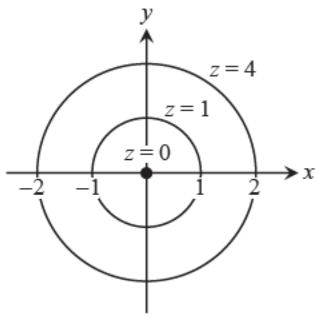
10) a)



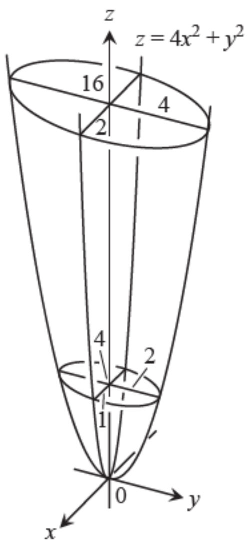


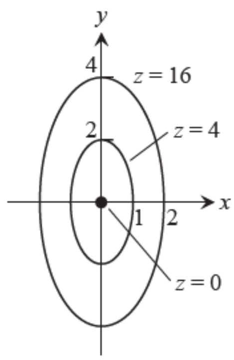
b)



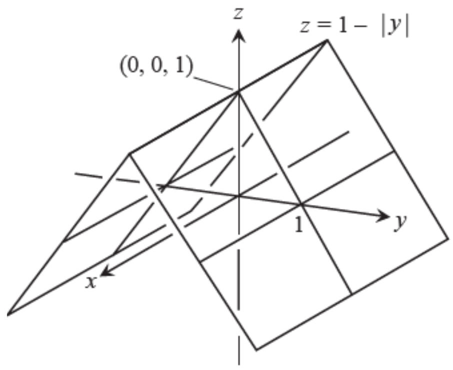


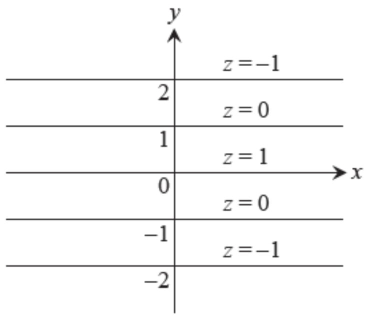
c)





d)





11)	a) –ln8	b) 0	c) 2/7	d) 1	e) 1/3	f) 1	g) 2
13)	a) Sim	b) Não	c) É contínua em *P*; Não é contínua em *Q*.				
14)	$a = 4$						