Engenharia Civil e
Engenharia Mecânica

MATRIZES E SISTEMAS LINEARES

Matriz – definição; operações; propriedades; aplicações.

O que é uma matriz 

Em matemática, uma **matriz** m x n é uma tabela de m linhas e n colunas de símbolos ou valores definida como:

DEFINIÇÃO: Uma matriz (real) $A = \left[a_{ij} \right]$ é uma lista de números reais a_{ij} com índices duplos, onde $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, representada como um quadro numérico com *m* linhas e *n* colunas.

$a_{i,j}$

Matriz m por n

m linhas

n colunas j

i

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{mxn}$$

Obs.:

- O par de números *m* e *n* é dito a **dimensão** da matriz.
- Usamos índices duplos para localizar os elementos de uma matriz. Por exemplo: $p_{22} = 2,3$; $q_{12} = 1/4$; $t_{31} = -1,4$.
- Outras notações também são usadas para representar uma matriz, como por exemplo:

Exemplos:

$$P = \begin{bmatrix} 2 & -1,5 \\ 0 & 2,3 \end{bmatrix} \qquad Q = \begin{bmatrix} 5 & 1/4 \\ -1 & 3,1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad T = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 2,5 \\ -1,4 \end{bmatrix}$$

Aplicações

✓ **Imagens:** A imagem que aparece na tela do computador, por exemplo, é uma matriz com 600 linhas e 800 colunas ou com 768 linhas e 1024 colunas, onde cada valor representa um ponto colorido mostrado na tela, que chamamos de pixel.

✓ **Álgebra Linear:** Resolução de sistemas lineares.

✓ **Pesquisas:** Armazenagem e manipulação de grande quantidade da dados coletados em pesquisas estatísticas (planilhas eletrônicas).

Tipos Especiais de Matrizes

Seja a matriz $D = [d_{ij}]_{mxn}$:

❖ **Matriz quadrada:** número de linhas é igual ao número de colunas;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 8 & 9 & 3 \\ 5 & 4 & 2 \\ 7 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

❖ **Matriz nula:** $a_{ij} = 0$, para todo i e j $[0_{mxn}]$; $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

❖ **Matriz coluna:** possui uma única coluna independente do número de linhas (n = 1);

$$C = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tipos Especiais de Matrizes

❖ **Matriz linha:** possui uma única linha independente do número de colunas, chamada também de **vetor** (m = 1);

$$B = \begin{bmatrix} 11 & 2{,}8 & -1{,}4 & 12 \end{bmatrix}$$

❖ **Matriz diagonal:** matriz quadrada onde $a_{ij} = 0$, para $i \neq j$;

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

❖ **Matriz identidade:** matriz quadrada em que $a_{ij} = 1$, para $i = j$ e $a_{ij} = 0$, para $i \neq j$ (um caso particular de uma matriz diagonal);

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tipos Especiais de Matrizes

❖ **Matriz triangular superior:** matriz quadrada onde TODOS os elementos abaixo da diagonal principal são nulos; ou seja, m = n e $p_{ij} = 0$, para i > j;

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

❖ **Matriz triangula inferior:** matriz quadrada onde TODOS os elementos acima da diagonal principal são nulos; ou seja, m = n e $p_{ij} = 0$, para i < j;

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

❖ **Matriz simétrica:** uma matriz será simétrica se coincidir com a sua transposta, ou seja, $p_{ij} = p_{ji}$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 8 \\ 5 & 8 & -9 \end{bmatrix} \text{ e } A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 8 \\ 5 & 8 & -9 \end{bmatrix}$$

Definição: Duas matrizes C e D são ***ditas iguais*** se têm a mesma dimensão e se seus elementos correspondentes são iguais, ou seja, $c_{ij} = d_{ji}$.

Exemplo: Determine os valores de x, y e z para que as matrizes $\begin{bmatrix} x+y & 2z+t \\ x-y & z-t \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ sejam iguais.

Transposta

Seja P uma matriz *m x n*. Sua transposta será a matriz P^T de ordem *n x m*.

Exemplo: Encontre a matriz transposta das matrizes:

$$a)\ B=\begin{bmatrix}6\\1\\4\\5\end{bmatrix} \qquad b)\ D=\begin{bmatrix}3/4 & -2\\1 & 0\\3/2 & -3\end{bmatrix} \qquad c)\ P=\begin{bmatrix}1 & -1\\2 & 3\end{bmatrix}$$

Propriedades: Sejam P e Q matrizes. Desde que sejam possíveis as operações, temos:

a) $(P + Q)^T = P^T + Q^T$

b) $(PQ)^T = Q^TP^T$

c) $(P^T)^T = P$

d) $(kP)^T = kP^T$, com k escalar

Adição

Sejam $A=\left[a_{ij}\right]$ e $B=\left[b_{ij}\right]$ duas matrizes de mesma dimensão, isto é, matrizes *m x n*. A soma de *A* e *B* (representada por *A*+*B*) é a matriz obtida pela adição dos elementos correspondentes de *A* e *B*:

$$A+B=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

Exemplo: Determine *P* + *B*, se existir, sendo P_{3x2} e B_{3x2} , onde $(p_{ij})= i + j$ e $(b_{ij})= 4i + j$.

Matriz Oposta

A matriz oposta de uma matriz C é representada por – C e quando somamos a matriz C com a sua oposta, – C, obtemos uma matriz nula.

Exemplo: Encontre a matriz oposta da matriz $C = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 0 & -1/4 & 3 \end{bmatrix}$.

Subtração

Subtração entre duas matrizes, representada por C – D, é a soma da matriz C com a oposta da matriz D, ou seja,
C – D = C + (– D)

Exemplo: Calcule C – D e D – C sabendo que $C = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 5 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 3/4 & -2 \\ 1 & 0 \\ 3/2 & -3 \end{bmatrix}$.

Propriedades da soma e subtração

Obs: Pela forma com que foi definida, a soma de matrizes tem as mesmas propriedades da soma de números reais.

Propriedades: Dadas as matrizes A, B e C de mesma ordem *mxn*, temos:

- A + B = B + A (comutativa)
- A + (B + C) = (A + B) + C (Associativa)
- A + 0 = A , onde 0 é a matriz nula *m x n*.
- A + (- A) = 0, onde 0 é a matriz nula *m x n*.

Produto de uma matriz por um escalar

O produto de uma matriz A por um escalar k, representado por k **.** A, é uma matriz obtida multiplicando cada elemento da matriz A pelo escalar k.

$$kA = \left[ka_{ij}\right] = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

Exemplo: Dados $B = [b_{ij}]_{3x2}$ e $D = [d_{ij}]_{3x2}$, onde $b_{ij} = i^2 – 3j^2$ e $d_{ij} = – 3i + j$. Determine:

a) $3B – 2D$

b) $(1/3)D – B$

Propriedades: Dadas as matrizes A e B de mesma ordem *m x n* e os números k e k', temos:

- $k(A + B) = kA + kB$
- $(k\,k')A = k\,(k'A)$
- $(k + k')\,A = kA + k'A$
- $0.A = 0_{mxn}$

Produto de matrizes

Sejam $A=\left[a_{ij}\right]$ e $B=\left[b_{ij}\right]$ matrizes tais que o número da colunas de A é igual ao número de linhas de B, ou seja, A_{mxp} e B_{pxn}. O produto AB é a matriz C_{mxn}, cujo elemento *ij* é obtido pela multiplicação de cada linha da matriz A por cada coluna da matriz B.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ . & \cdots & . \\ a_{i1} & \cdots & a_{ip} \\ . & \cdots & . \\ a_{m1} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ . & \cdots & . & \cdots & . \\ . & \cdots & . & \cdots & . \\ . & \cdots & . & \cdots & . \\ b_{p1} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ . & \cdots & . \\ . & c_{ij} & . \\ . & \cdots & . \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

Resumindo: A **Multiplicação de duas matrizes** é definida apenas se o **número de colunas** da matriz da **esquerda** é igual ao **número de linhas** da matriz da **direita**.

$$\begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 2 & 3,4 & -3 \\ -2 & 5 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}_{5x3} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{3x2} = \begin{bmatrix} & \\ & \\ & \end{bmatrix}_{5x2}$$

Exemplo: Determine, se possível, *PQ*, sendo:

a) $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ e $Q = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 6 \\ 0 & -1/4 & -4 \end{bmatrix}$

b) $P = \begin{bmatrix} 9 & -5/4 \end{bmatrix}$ e $Q = \begin{bmatrix} -1/3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

c) $P = \begin{bmatrix} -4 & 1/2 & 7 \end{bmatrix}$ e $Q = \begin{bmatrix} -1/3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

Problema:

Durante a 1ª fase da Copa do Mundo de 1998 (França), o grupo do Brasil era formado também pela escócia, Marrocos e Noruega. Os resultados estão registrados abaixo em uma matriz A, de ordem 4 x 3.

País	Vitória	Empate	Derrota
Brasil	2	0	1
Escócia	0	1	2
Marrocos	1	1	1
Noruega	1	2	0

Logo: $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

A pontuação pode ser descrita pela matriz B, de ordem 3 x 1.

Número de Pontos	
Vitória	3
Empate	1
Derrota	0

Então: $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Logo: $AB = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

➢ Considerando que as multiplicações são possíveis, assinale V ou F para cada uma das sentenças abaixo, justificando a resposta.

(   ) $AB = BA$ (   ) Se $AC = BC$, então A = B?

(   ) Se AB = 0, então A = 0 ou B = 0?

Propriedades: Sejam A, B e C matrizes. Desde que sejam possíveis as operações, temos:

- ✓ (AB)C = A(BC)
- ✓ k(AB) = (kA)B = A(kB)
- ✓ A(B + C) = AB + AC

Definição: Dada uma matriz quadrada **A**, de ordem **n**, se **X** é uma matriz tal que $AX = I_n$ e $XA = I_n$, então **X** é denominada ***matriz inversa*** de **A** e é indicada por $\mathbf{A^{-1}}$. Quando existe a matriz inversa de **A**, dizemos que **A** é uma matriz inversível ou não singular.

Exemplo: Verifique se existe e, em caso afirmativo, determine a matriz inversa de $A = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Exemplo: Determine a inversa das seguintes matrizes:

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

Determinantes

Quando nos referimos ao determinante, no referimos ao número associado a uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$.

Ou seja: det A ou det $[a_{ij}]$

Veremos a seguir métodos de resolver determinantes.

Determinantes

DETERMINANTE DE UMA MATRIZ DE 2ª ORDEM

O determinante de uma matriz quadrada A de ordem 2 é indicado por

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$ e é obtido pela expressão $a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$

$-$ $+$

Exemplo: Calcule o determinante da matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Determinantes

DETERMINANTE DE UMA MATRIZ DE 3ª ORDEM – Regra de Sarrus

Podemos obter o determinante de uma matriz quadrada de ordem 3 utilizando a regra prática de Sarrus.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32} - a_{13}.a_{22}.a_{31} - a_{11}.a_{23}.a_{32} - a_{12}.a_{21}.a_{33}$$

$-\quad -\quad -\quad +\quad +\quad +$

Determinantes

Exemplo: Calcule o determinante da matriz: $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

COFATOR

Dada uma matriz $A = (a_{ij})$, quadrada de ordem n, denominamos cofator de a_{ij} ao produto de $(-1)^{i+j}$ pelo determinante D_{ij} obtido quando se retira de A a i-ésima linha e a j-ésima coluna.

O cofator de será indicado por C_{ij}.

Então: $C_{ij} = (-1)^{i+j}.D_{ij}$

Determinantes

Assim, se considerarmos $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ temos que:

$$C_{11} = (-1)^{1+1} . D_{11} = (-1)^{1+1} . \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3} . D_{23} = (-1)^{2+3} . \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Determinantes

O **Teorema de Laplace** consiste em escolher uma das filas (linha ou coluna) da matriz e somar os produtos dos elementos dessa fila pelos seus respectivos cofatores.

Veja como calcular o determinante da matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ pela 1ª linha:

$$\det A = a_{11}.C_{11} + a_{12}.C_{12} + a_{13}.C_{13}$$ onde: $$C_{11} = (-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 1.\ (a_{22}.a_{33} - a_{23}.a_{32})$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2}.\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1).\ (a_{21}.a_{33} - a_{23}.a_{31})$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3}.\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = 1.\ (a_{21}.a_{32} - a_{22}.a_{31})$$

Determinantes

O determinante da matriz A pode ser desenvolvido segundo os elementos de qualquer linha ou de qualquer coluna que o resultado será o mesmo.

O teorema de Laplace pode ser usado, também, para o cálculo de determinante de ordem maior que 3.

Exemplo: Calcule o determinante da matriz:

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Determinantes

PROPRIEDADES DOS DETERMINANTES

1ª Propriedade

Se todos os elementos de uma linha ou coluna forem nulos, seu determinante é zero.

$$\det M = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 0 \qquad \det N = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 5 & -9 \\ 5 & 8 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -9 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Determinantes

PROPRIEDADES DOS DETERMINANTES

2ª Propriedade

Se 2 linhas (ou 2 colunas) forem iguais ou proporcionais, seu determinante é zero.

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ 6 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \det B = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 15 \end{vmatrix} = 0$$

Determinantes

PROPRIEDADES DOS DETERMINANTES

3ª Propriedade

Se uma linha (ou coluna) for combinação linear de outras linhas (ou colunas), seu determinante é zero.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

Observe que a $L_3 = L_1 + L_2$, ou seja, a 3ª linha é combinação linear da 1ª com a 2ª linha.

Determinantes

PROPRIEDADES DOS DETERMINANTES

$$\det B = \begin{vmatrix} 5 & 4 & -3 \\ 2 & 2 & -2 \\ -7 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

Observe que a $C_1 = 2. C_2 + C_3$ (combinação linear).

4ª Propriedade

O determinante de uma matriz é igual ao de sua transposta.

Exemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Determinantes

PROPRIEDADES DOS DETERMINANTES

5ª Propriedade

Se todos os elementos de uma matriz quadrada situados de um mesmo lado da diagonal principal forem nulos, o determinante da matriz será igual ao produto dos elementos dessa diagonal.

Exemplo:

$$\det N = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 & 6 \\ 0 & 4 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$