

Prof^a. Me. Samanta Santos da Vara Vanini

Lista sobre Matrizes

EXERCÍCIOS

1. Construa a matriz real quadrada A de ordem 3, definida por:

$$a_{ij} = \begin{cases} 2^{i+j} & \text{se } i < j \\ i^2 - j + 1 & \text{se } i \geq j \end{cases}$$

2. Sendo $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 4 & -3 & 5 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, calcule:

a) $N - P + M$

b) $2M - 3N - P$

3. Calcule a matriz X , sabendo que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e

$$(X + A)^t = B.$$

4. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & b \\ b & 1 \end{bmatrix}$, determine a e b , de modo que $AB = I$, em que I é a matriz identidade.

5. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$. Calcule:

a) A^2

b) A^2B

6. Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, calcule $AB + B^t$.

7. Resolva a equação:

$$\begin{pmatrix} 2x & -3 \\ x-1 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & x \\ -1 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 2x^2 - 3y \\ 2x - y - 2 & 11 \end{pmatrix}$$

Prof^a. Me. Samanta Santos da Vara Vanini

8. O produto M.N da matriz $M = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ pela matriz $N = (1 \ 1 \ 1)$;

- a) não se define.
- b) É a matriz identidade de ordem 3
- c) É uma matriz de uma linha e uma coluna.
- d) É uma matriz quadrada de ordem 3.
- e) Não é uma matriz quadrada.

9. Escreva as seguintes matrizes:

- a) $M = (m_{ij})$, com $1 \leq i \leq 3$ e $1 \leq j \leq 3$, tal que $m_{ij} = 3i + 2j - 5$.
- b) Matriz diagonal de ordem 4 em que $a_{ij} = i + j$.
- c) Matriz triangular inferior de ordem 3 onde $\begin{cases} a_{ij} = (i + j)^2 & \text{para } i = j \\ a_{ij} = -2 & \text{para } i > j \end{cases}$

10. Um projeto de pesquisa sobre dietas envolve adultos e crianças de ambos os sexos. A composição dos participantes no projeto é dada pela matriz

$\begin{bmatrix} 80 & 120 \\ 100 & 200 \end{bmatrix}$, onde as linhas são o sexo masculino e feminino respectivamente,

e as colunas são adultos e crianças respectivamente.

O número diário de gramas de proteínas, de gorduras e de carboidratos consumidos por crianças e por adultos é dado pela matriz $\begin{bmatrix} 20 & 20 & 20 \\ 10 & 20 & 30 \end{bmatrix}$,

onde as linhas são os adultos e crianças respectivamente e as colunas são proteínas, gorduras e carboidratos respectivamente.

A partir dessas informações, julgue os itens e justifique todas através de cálculos:

- a) 6000g de proteínas são consumidos diariamente por adultos e crianças do sexo masculino.
- b) A quantidade de gorduras consumida diariamente por adultos e crianças do sexo masculino é 50% menor que a consumida por adultos e crianças do sexo feminino.
- c) As pessoas envolvidas no projeto consomem diariamente um total de 13200g de carboidratos.

Prof^a. Me. Samanta Santos da Vara Vanini

11. O gerente de uma danceteria fez um levantamento sobre a frequência da casa em um final de semana e enviou a seguinte tabela para o proprietário:

$\begin{bmatrix} 80 & 60 \\ ? & 75 \end{bmatrix}$, onde as linhas representam sábado e domingo respectivamente e as

colunas rapazes e moças respectivamente.

O gerente esqueceu-se de informar um campo da tabela, mas sabia que, curiosamente, a arrecadação nos dois dias foi a mesma. Sabendo que o ingresso para rapazes é de R\$ 15,00 e para moças é de R\$ 12,00:

- Represente, através de produto de matrizes, a matriz que fornece a arrecadação da casa em cada dia.
- Qual é o valor do campo que ficou sem ser preenchido?

12. Em uma empresa de montagem de máquinas trabalham com a montagem mecânica, elétrica e teste. Para uma máquina X demoram 30 minutos com a montagem elétrica, 40 minutos com a montagem mecânica e 30 minutos com teste. Para uma máquina Y demoram 20 minutos com a montagem elétrica, 50 minutos com a montagem mecânica e 30 minutos com teste. E finalmente, para uma máquina Z demoram 30 minutos com a montagem elétrica, 30 minutos com a montagem mecânica e 20 minutos com teste. Assim respondam o que se pede:

- Representem em uma matriz as informações dadas anteriormente.
- Quantas horas são necessárias para a montagem mecânica das três máquinas?
- Quantas **horas** são necessárias para realização da montagem da máquina Z?

Prof^a. Me. Samanta Santos da Vara Vanini

Respostas:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 16 \\ 4 & 3 & 32 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$

2) a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 7 & -5 & 6 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -1 & 5 & 5 \\ 0 & -3 & -5 \\ 11 & -8 & 7 \end{pmatrix}$

3) $X = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

4) $a = 1$ e $b = 0$

5) a) $\begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -15 & -3 \\ 18 & 0 \end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix} 8 & 11 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$

7) $V = \{(2,3), (2,-3)\}$

8) d)

9) a) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$
 b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
 c) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 16 & 0 \\ -2 & -2 & 36 \end{pmatrix}$

10) a) (F) pois 6000g são de gorduras ingeridas por pessoas do sexo feminino

b) (F) pois corresponde somente a aproximadamente 30%

c) (V) pois $5200 + 8000 = 13200$

11) a) $\begin{pmatrix} 80 & 60 \\ x & 75 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \end{pmatrix}$

b) No domingo foram 68 rapazes

12) a) $\begin{pmatrix} 30 & 40 & 30 \\ 20 & 50 & 30 \\ 30 & 30 & 20 \end{pmatrix}$

b) 2h

c) 1h

Prof^a. Me. Samanta Santos da Vara Vanini

Exercícios Complementares

13) Uma nutricionista recomendou a alguns pacientes a ingestão de uma quantidade mínima

de frutas, leite e cereais. A matriz $A = \begin{bmatrix} 200 \\ 300 \\ 600 \end{bmatrix}$ fornece, respectivamente, a quantidade mínima,

em gramas, de frutas, leite e cereais. A matriz

$B = \begin{bmatrix} 0,006 & 0,033 & 0,108 \\ 0,001 & 0,035 & 0,018 \\ 0,084 & 0,052 & 0,631 \end{bmatrix}$ apresenta a quantidade de proteínas (1^a linha), gorduras (2^a

linha) e carboidratos (3^a linha), em gramas, fornecida por grama ingerida de fruta (1^a coluna),

leite (2^a coluna) e cereais (3^a co

luna).

a) Determine a matriz que mostra a quantidade diária mínima (em gramas) de proteínas, gorduras e carboidratos fornecida pela ingestão daqueles alimentos.

b) Se, por engano, operarmos com a matriz $A' = \begin{bmatrix} 600 \\ 300 \\ 200 \end{bmatrix}$, sendo, respectivamente, cereais, leite

e frutas, em lugar da matriz A , o que é preciso alterar na matriz B para que a solução do item anterior continue correta?

14) Uma das formas de se enviar uma mensagem secreta é por meio de códigos matemáticos,

seguindo os passos:

I. Tanto o destinatário quanto o remetente possuem uma matriz chave C .

II. O destinatário recebe do remetente uma matriz P , tal que $MC = P$, onde M é a matriz mensagem a ser decodificada.

III. Cada número M corresponde a uma letra do alfabeto: $1 = a, 2 = b \dots 23 = z$.

IV. O alfabeto deve ser considerado excluindo as letras k, w e y .

V. O número 0 corresponde ao ponto de exclamação.

VI. A mensagem é lida, encontrando a matriz M , fazendo a correspondência número/letra e ordenando as letras por linhas da matriz conforme segue:

$$m_{11}m_{12}m_{13}m_{21}m_{22}m_{23}m_{31}m_{32}m_{33}.$$

Considerando as matrizes $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $P = \begin{bmatrix} 2 & -10 & 1 \\ 18 & 38 & 17 \\ 19 & 14 & 0 \end{bmatrix}$, qual foi a mensagem

15) Um dispositivo eletrônico, usado em segurança, modifica a senha escolhida por um usuário, de acordo com o procedimento descrito abaixo:

A senha escolhida $S_1S_2S_3S_4$ deve conter quatro dígitos, representados por S_1, S_2, S_3 , e S_4 .

Esses dígitos são transformados nos dígitos M_1, M_2, M_3 , e M_4 , da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} M_3 \\ M_4 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} \text{ onde } P \text{ é a matriz } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se a senha de um usuário, já modificada, é 0110, qual foi a senha escolhida pelo usuário? enviada por meio da matriz M ?

Prof^a. Me. Samanta Santos da Vara Vanini

EXERCÍCIOS

1. Calcule o valor dos determinantes:

$$a) \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -1 \end{vmatrix}$$

$$b) \begin{vmatrix} -5 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$c) \begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$d) \begin{vmatrix} \sqrt{2} & 4 \\ -3 & -\sqrt{2} \end{vmatrix}$$

2. Resolva as equações:

$$a) \begin{vmatrix} x & x+2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

$$b) \begin{vmatrix} x & x \\ 5 & x \end{vmatrix} = 0$$

$$c) \begin{vmatrix} x-1 & 3 \\ 2 & x-2 \end{vmatrix} = 0$$

$$d) \begin{vmatrix} 2(x-1) & x-2 \\ x+2 & x+1 \end{vmatrix} = 6$$

3. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, calcular o determinante da matriz $A \cdot B$

4. Calcule o valor dos determinantes abaixo pela regra de Sarrus:

$$a) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$b) \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$c) \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$d) \begin{vmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$e) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

5. Resolva as equações:

$$a) \begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$$

$$b) \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & x \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$c) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ x & 1 & x \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 15$$

$$d) \begin{vmatrix} 2 & x & 3 \\ -2 & -x & 4 \\ 1 & -3 & x \end{vmatrix} = 175$$

$$e) \begin{vmatrix} x+1 & 3 & x \\ 3 & x & 1 \\ x & 2 & x-1 \end{vmatrix} = 0$$

6. Aplique o teorema de Laplace para resolver os determinantes abaixo:

$$a) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$b) \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$c) \begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -4 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$d) \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$e) \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 1 \\ -1 & 6 & 5 \end{vmatrix}$$

Prof^a. Me. Samanta Santos da Vara Vanini

7. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & 8 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 7 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, calcule $\det A$ e $\det A^t$.

8. Calcule os determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -3 & 1 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ -3 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 \\ -4 & -2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 6 & 0 \\ -4 & -2 & -8 & 3 \\ -1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 9 & 0 & 0 \\ 15 & 5 & 1 & 0 \\ 60 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & -3 & 0 & -4 \end{vmatrix}$

h) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 & 6 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

9. Resolva as equações:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ x & x^2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & x & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 8$

Respostas:

1) a) 14 b) 11 c) 26 d) 10 2) a) $S=\{5\}$ b) $S=\{0,5\}$ c) $S=\{-1,4\}$ d) $S=\{-2,2\}$ 3)

4) a) 15 b) 42 c) 2 d) 0 e) -11 5) a) $S=\{-1\}$ b) $S=\{1\}$ c) $S=\{5\}$ d) $S=\{19\}$ e) $S = \left\{ \begin{matrix} 7 \\ 3 \end{matrix} \right\}$

6) a) 15 b) 42 c) 0 d) 51 e) -42 7) $\det A = \det A^t = 70$ 8) a) 2 b) -230 c) 4 d) 0

e) 0 f) -36 g) 0 h) 40 9) a) $S=\{1\}$ b) $S=\{-2\}$