

## PRODUTOS NOTÁVEIS

### Introdução e Definição:

Certas expressões aparecem com bastante frequência no cálculo numérico ou algébrico, em diversas áreas em que a matemática está aplicada. O **Produto Notável** é um desses casos. Analisando o significado, como o próprio nome já diz:

produto → nome que se dá ao resultado da multiplicação

notável → digno de atenção, que se destaca

O único problema é que, às vezes, esses produtos notáveis aparecem e a gente nem nota!

Existem muitos “modelos” de Produtos Notáveis, entretanto nosso estudo será concentrado em produtos oriundos de três modelos básicos. São eles:

$$(a + b)^2 \quad (a - b)^2 \quad (a + b).(a - b)$$

Das expressões acima, poderemos calcular tais produtos, usando-se a propriedade distributiva (conhecida como “chuveirinho”), ou então, de forma mais direta, utilizando-se de algumas regras [fórmulas] que veremos a seguir.

Daí vem o sentido do nome PRODUTO NOTÁVEL, pois poderemos, com um pouco de prática, encontrar o produto das expressões dadas, diretamente através de uma regra [fórmula] sem que se necessite fazer todos os cálculos. E isso, em algumas situações de cálculo, fará grande diferença.

### Inicialmente...

Calcule o produto das expressões dadas a seguir:

$$(3 + 4)^2 = ?$$

$$(3 + 4)^2 = (7)^2 = 7 \cdot 7 = 49$$

$$\left(5 - \frac{1}{2}\right)^2 = ?$$

$$\left(5 - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{10-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{9}{2}\right)^2 = \frac{9}{2} \cdot \frac{9}{2} = \frac{81}{4} = 20,25$$

**Note** que nos casos acima, basta operarmos os números dentro dos parênteses e em seguida, elevarmos o resultado ao expoente, que neste caso é 2.

### Entretanto, como encontraríamos os produtos dos exemplos a seguir?

i)  $(x + 4)^2 = ?$

ii)  $(5 - m)^2 = ?$

**É fato** que, nos casos [i] e [ii] **não** poderemos operar os valores dentro dos parênteses, pois **não** é possível somarmos ou subtrairmos números com incógnitas [ou variáveis]. Entretanto podemos aplicar o método conhecido como “chuveirinho”. Veja para o exemplo [i]:

i)  $(x + 4)^2 = ?$   $(x + 4)^2 = (x + 4).(x + 4) = xx + x4 + 4x + 4.4 = x^2 + 4x + 4x + 16 = x^2 + 8x + 16$

**Então temos que:**  $(x + 4)^2 = x^2 + 8x + 16$

**Agora**, fazendo de forma um pouco mais objetiva, o exemplo [ii]:

ii)  $(5 - m)^2 = ?$   $(5 - m)^2 = (5 - m).(5 - m) = 25 - 5m - 5m + m^2 = 25 - 10m + m^2$

**Então temos que:**  $(5 - m)^2 = m^2 - 10m + 25$

[note que “ordenamos” os termos (parcelas) do produto em grau decrescente – uma questão de organização]

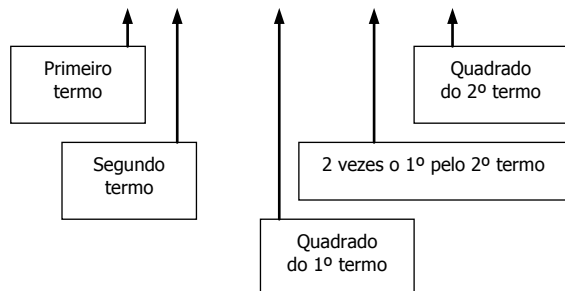
É possível perceber que existe um PADRÃO no produto dos exemplos [i] e [ii]. Conhecendo este padrão, que é o que chamamos de produto notável, poderemos rapidamente efetuar as operações para encontrá-lo.

Vejam agora os “modelos” que envolvem os produtos notáveis mais comuns:

**1. Quadrado da Soma de dois Termos**

$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + ab + ab + b^2$$

**Portanto:**  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$



Logo, podemos estabelecer a seguinte regra:

“O quadrado da soma de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo mais duas vezes o produto do 1º pelo 2º termo, mais o quadrado do segundo termo”.

**Exemplos:**

a)  $(x + y)^2 = (x)^2 + [ 2 \cdot (x) \cdot (y) ] + (y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

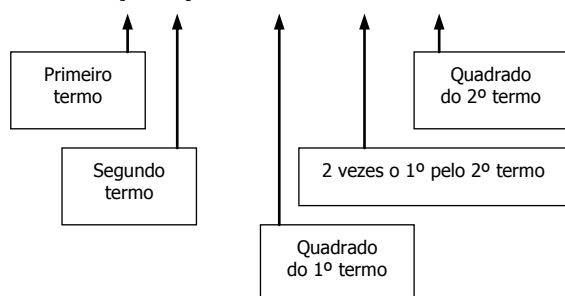
b)  $(3a + 2)^2 = (3a)^2 + [ 2 \cdot (3a) \cdot (2) ] + (2)^2 = 9a^2 + 12a + 4$

c)  $\left(3m + \frac{4}{3}\right)^2 = (3m)^2 + 2 \cdot (3m) \cdot \left(\frac{4}{3}\right) + \left(\frac{4}{3}\right)^2 = 9m^2 + \frac{24m}{3} + \frac{16}{9} = 9m^2 + 8m + \frac{16}{9}$

**2. Quadrado da Diferença de dois Termos**

$$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a^2 - ab - ab + b^2$$

**Portanto:**  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$



Logo, podemos estabelecer a seguinte regra:

“O quadrado da diferença de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo menos duas vezes o produto do 1º pelo 2º termo, mais o quadrado do segundo termo”.

**Exemplos:**

a)  $(x - y)^2 = (x)^2 - [ 2 \cdot (x) \cdot (y) ] + (y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

b)  $(3a - 5)^2 = (3a)^2 - [ 2 \cdot (3a) \cdot (5) ] + (5)^2 = 9a^2 - 30a + 25$

c)  $\left(4m - \frac{3}{5}\right)^2 = (4m)^2 - 2 \cdot (4m) \cdot \left(\frac{3}{5}\right) + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 16m^2 - \frac{24m}{5} + \frac{9}{25}$

**Observação:**  
 A expressão  $a^2 \pm 2ab + b^2$  também é conhecida como **trinômio quadrado perfeito** devido ao fato de ser possível reduzi-la à forma  $(a \pm b)^2$ . Assim, a expressão  $x^2 + 8x + 16$  é um trinômio quadrado perfeito, pois é verdade que  $x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$ . Entretanto, nem toda expressão com 3 termos [trinômio] é dita “quadrado perfeito”. Note, por exemplo, que a expressão  $x^2 + 8x + 15$  é apenas um trinômio qualquer, pois **não** pode ser escrito na forma  $(a \pm b)^2$ .

### 3. Produto da Soma e Diferença de dois Termos

O Produto da Soma pela Diferença de dois Termos segue um raciocínio “parecido” com os casos anteriores. Entretanto é importante notar a diferença deste em relação aos anteriores. Veja a seguir:

$$(a+b).(a-b) = a^2 - \cancel{ab} + \cancel{ab} - b^2 = a^2 - b^2$$

**Portanto:**  $(a+b).(a-b) = a^2 - b^2$

Logo podemos estabelecer a seguinte regra:

“O produto da soma pela diferença de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo menos o quadrado do segundo termo”.

#### Exemplos:

**a)**  $(x+y).(x-y) = x^2 - \cancel{xy} + \cancel{yx} - y^2$

Logo:  $(x+y).(x-y) = x^2 - y^2$

**b)**  $(3a-5).(3a+5) = (3a)^2 - (5)^2 = 9a^2 - 25$

Logo:  $(3a-5).(3a+5) = 9a^2 - 25$

**c)**  $\left(4m + \frac{3}{2}\right) \cdot \left(4m - \frac{3}{2}\right) = (4m)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 16m^2 - \frac{9}{4}$

Logo:  $\left(4m + \frac{3}{2}\right) \cdot \left(4m - \frac{3}{2}\right) = 16m^2 - \frac{9}{4}$

#### CURIOSIDADE:

Quando não se dispõe de uma máquina de calcular, podemos utilizar um dos modelos de produto notável para facilitar alguns cálculos bem específicos. Veja um caso desses:

#### Qual o produto de (41).(39)?

Transformando a multiplicação dada para um modelo de produto notável, temos:

$$(41).(39) = (40 + 1).(40 - 1) = [40]^2 - [1]^2 = 1600 - 1 = 1599$$

Observe que este artifício nem sempre será possível aplicar!

Agora tente você!

Calcule o valor de (101).(99) sem utilizar uma calculadora e aplicando o modelo de produto notável visto acima.

#### Resumindo toda a teoria, temos:

$$(a+b)^2 = (-a-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = (-a+b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b).(a-b) = (a-b).(a+b) = a^2 - b^2$$

### EXERCÍCIOS – Produtos Notáveis

1) Calcule os produtos dos termos apresentados:

**a)**  $(a+5)^2$

**e)**  $(x-1)^2$

**i)**  $(\frac{3}{4} - 4y).(4y + \frac{3}{4})$

**b)**  $(x+1)^2$

**f)**  $(x+3).(x-3)$

**j)**  $(m^2 - \frac{1}{2}).(m^2 + \frac{1}{2})$

**c)**  $(2x+3y)^2$

**g)**  $(2x-1).(2x+1)$

**d)**  $(a-2)^2$

**h)**  $(7+a).(-a+7)$

2) Desenvolva os produtos, simplificando as expressões:

- a)  $(a - 2)^2 - 2 \cdot (a + 2) =$                       d)  $(x - 3)^2 + (x + 3)^2 =$   
 b)  $(y + 5)^2 - y \cdot (y + 10) =$                       e)  $(x + y) \cdot (x - y) + (x + y)^2 - 2xy =$   
 c)  $(a + b)^2 + (a - b)^2 =$

3) Desenvolva os produtos, simplificando as expressões:

- a)  $(2x + 1)^2 + (2x - 1)^2 =$                       d)  $(2x + 1)^2 + 2x(x - 1)^2 =$   
 b)  $3(y^2 - 1)^2 + 2(2y + 2)^2 =$                       e)  $(ab + 1)^2 + ab(ab + 2) =$   
 c)  $(2xy + 3)(x^2 - 2) - (x - 1)^2 =$                       f)  $(4ay - 1)^2 - 4(ay - 1)^2 =$

4) Nos casos abaixo, obtenha os produtos notáveis:

- a)  $(3m^2 + 4n)^2 =$                                       e)  $(3a^2 - 2b^6)^2 =$   
 b)  $(7y^2 + 3y^4)^2 =$                                       f)  $(1 + x^5)^2 =$   
 c)  $(b^4 + c^5)^2 =$                                       g)  $(-x + 3)^2 =$   
 d)  $(x^2 - 3)^2 =$     h)  $(-x - 2y)^2 =$

5) Calcule os seguintes produtos notáveis:

- a)  $\left(2xy - \frac{1}{4}\right)^2 =$                                       c)  $\left(\frac{1}{3}a^2b - 2ab^3\right)^2 =$   
 b)  $\left(3ab - \frac{b^2}{3}\right)^2 =$                                       d)  $\left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{6}y^2\right)^2 =$                                       e)  $\left(\frac{1}{5} + \frac{4m^2}{7}\right)^2 =$

**Importante!**

Observe as igualdades:

$$(a + b)^2 = (-a - b)^2$$

$$(a - b)^2 = (-a + b)^2$$

Apesar de, num primeiro momento, parecer que não estão corretas, elas são VERDADEIRAS. Verifique você mesmo que:

$$(x + 3)^2 = (-x - 3)^2$$

$$(m - 7)^2 = (-m + 7)^2$$

Por que isso acontece?

Tarefa dada é tarefa feita! [Parafraseando Capitão Nascimento – Tropa de Elite]

**RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS**

- |                                   |                                       |   |  |   |
|-----------------------------------|---------------------------------------|---|--|---|
| 1a) $a^2 + 10a + 25$              | 1b) $x^2 + 2x + 1$                    | 1c) $4x^2 + 12xy + 9y^2$                              | 1d) $a^2 - 4a + 4$   | 1e) $x^2 - 2x + 1$                                      |
| 1f) $x^2 - 9$                     | 1g) $4x^2 - 1$                        | 1h) $49 - a^2$  | 1i) $\frac{9}{16} - 16y^2$                                   | 1j) $m^4 - \frac{1}{4}$                                 |
| 2a) $a^2 - 6a$                    | 2b) 25                                | 2c) $2a^2 + 2b^2$                                     | 2d) $2x^2 + 18$  | 2e) $2x^2$  |
| 3a) $8x^2 + 2$                    | 3b) $3y^4 + 2y^2 + 16y + 11$          | 3c) $2x^3y - 4xy + 2x^2 + 2x - 7$                     | 3d) $12a^2y^2 - 3$   | 3e) $2a^2b^2 + 4ab + 1$                                 |
| 3d) $2x^3 + 6x + 1$               | 3e) $2a^2b^2 + 4ab + 1$               | 3f) $12a^2y^2 - 3$                                    | 3g) $b^8 + 2b^4c^5 + c^{10}$                                 | 3h) $x^4 - 6x^2 + 9$                                    |
| 4a) $9m^4 + 24m^2n + 16n^2$       | 4b) $49y^4 + 42y^6 + 9y^8$            | 4c) $b^8 + 2b^4c^5 + c^{10}$                          | 4d) $x^4 - 6x^2 + 9$   | 4e) $x^2 + 4xy + 4y^2$                                  |
| 4e) $9a^4 - 12a^2b^6 + 4b^{12}$   | 4f) $1 + 2x^5 + x^{10}$               | 4g) $x^2 - 6x + 9$                                    | 4h) $x^2 + 4xy + 4y^2$                                       | 4i) $x^2 - 6x + 9$                                      |
| 5a) $4x^2y^2 - xy + \frac{1}{16}$ | 5b) $9a^2b^2 - 2ab^3 + \frac{b^4}{9}$ | 5c) $\frac{1}{9}a^4b^2 - \frac{4}{3}a^3b^4 + 4a^2b^6$ | 5d) $\frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{12}x^2y^2 + \frac{1}{36}y^4$ | 5e) $\frac{1}{25} + \frac{8}{35}m^2 + \frac{16}{49}m^4$ |

**Para refletir:** Fica sempre um pouco de perfume nas mãos de quem oferece flores!