INSTITUTO FEDERAL
Sul-rio-grandense
Câmpus
Passo Fundo

EDUCAÇÃO PÚBLICA 100% GRATUITA

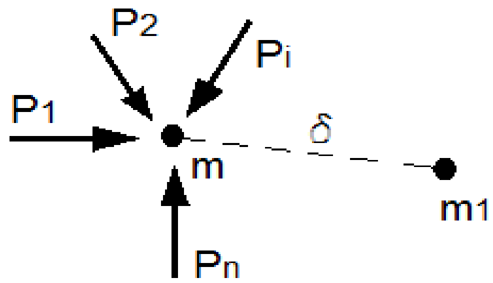
ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

02 – Princípio dos Trabalhos Virtuais

©2024 - Prof. Dr. Rodrigo Bordignon

PTV – Princípio dos Trabalhos Virtuais

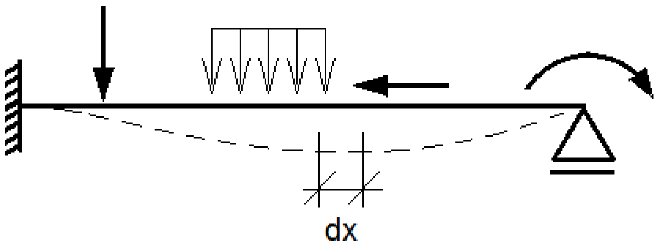
Desenvolvido por John Bernoulli em 1717, o princípio dos trabalhos virtuais permite obter o deslocamento e a inclinação em um determinado ponto de um sistema estrutural, seja este uma viga, grelha, pórtico ou treliça.

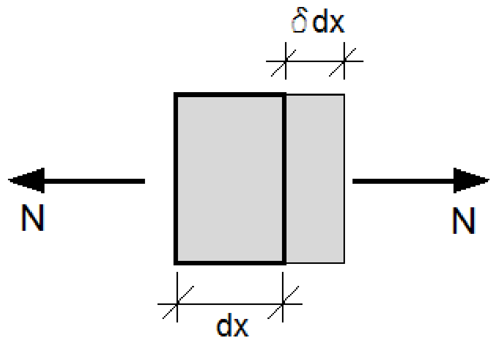


$$W_{ext} = W_{int} = 0$$

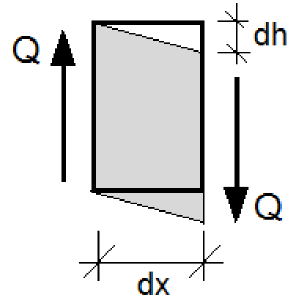
$$W_{ext} = W_{int} \rightarrow F.D = f.d$$

As figuras seguintes mostram um corpo elástico submetido a um carregamento e que atingiu sua configuração de equilíbrio:

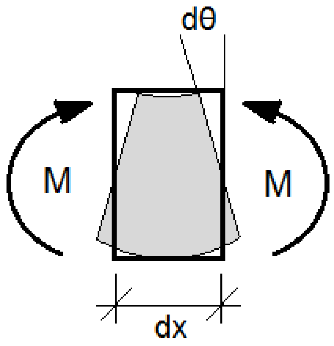




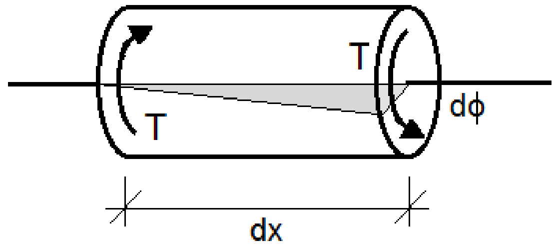
deformação axial



deformação por cisalhamento



deformação por flexão



deformação por torção

INSTITUTO FEDERAL
Sul-rio-grandense
Câmpus Passo Fundo

A equação geral para sistemas estruturais deformáveis no plano, em um regime elástico-linear, considerando-se a existência dos esforços solicitantes N, Q, M e T pela superposição de efeitos causados por um carregamento externo sobre cada elemento de barra dx qualquer, será:

$$\varepsilon = \frac{\delta . dx}{dx} \therefore \sigma = \frac{N}{A} \therefore \sigma = E . \varepsilon$$

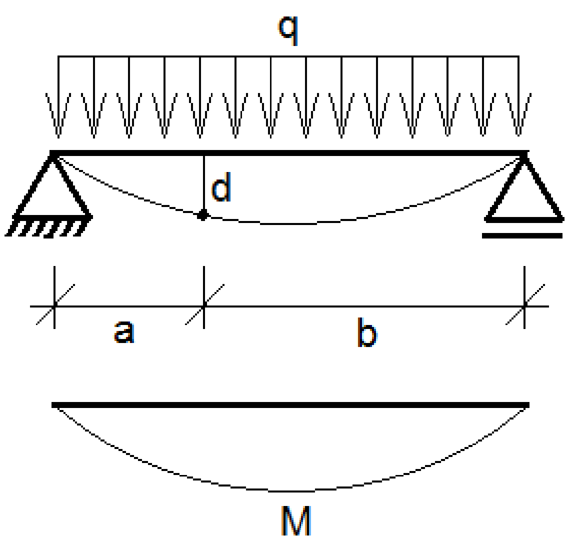
$$\frac{N}{A} = E . \frac{\delta . dx}{dx} \rightarrow \delta . dx = \frac{N}{A . E} dx$$

$$W_{\text{int}} = \int \frac{N . dx}{A . E} + \int \frac{. Q . dx}{AG} + \int \frac{M . dx}{IE} + \int \frac{T . dx}{I_P . G}$$

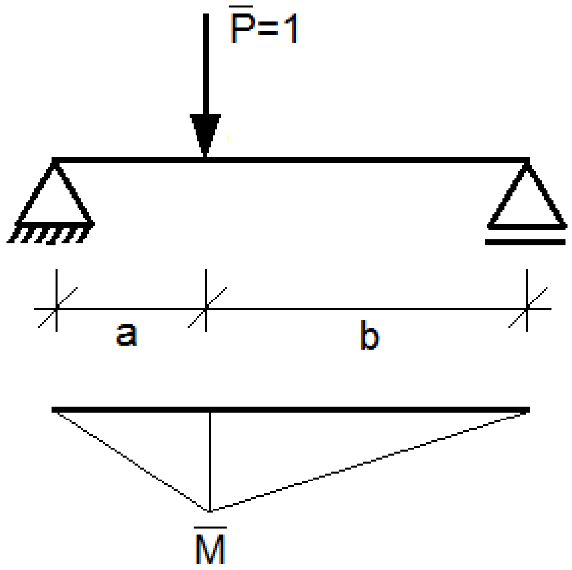
De forma análoga ao Princípio dos Trabalhos Virtuais para deslocamentos virtuais, tem-se o Princípio das Forças Virtuais.

Método da Carga Unitária

De maneira particular o Princípio dos Trabalhos Virtuais considera a força virtual com valor unitário é conhecida como Método da Carga Unitária e pode ser utilizado para determinar o valor dos deslocamentos reais em sistemas estruturais.



Sistema Real



Sistema Virtual

Trabalho virtual das forças externas (cargas e reações):

$$W_{ext} = \overline{P}.\delta$$

Trabalho virtual das forças internas será a soma dos trabalhos virtuais de deformação de cada um dos esforços internos atuantes:

$$W_{\text{int}} = \int \overline{N}.\delta dx + \int \overline{Q}.dh + \int \overline{M}.d\theta + \int \overline{T}.d\phi$$

$$1.\delta = \int \frac{N\overline{N}.}{A.E}dx + \int \frac{Q\overline{Q}}{AG}dx + \int \frac{M\overline{M}.}{IE}dx + \int \frac{T\overline{T}}{I_P.G}dx$$

que é a <u>Equação Geral de Maxwell-Mohr</u>, para o cálculo de deslocamentos em sistemas estruturais de comportamento elástico-linear devido a cargas externas atuantes.

INSTITUTO FEDERAL Sul-rio-grandense Câmpus Passo Fundo

A parcela $\int \frac{Q\overline{Q}}{AG}dx$ pode ser desprezada, já que a deformação por cisalhamento apresenta valores relativamente pequenos.

Da mesma maneira, podemos desprezar a parcela $\int \frac{N\overline{N}}{A.E}dx$ em elementos que não estejam solicitados a esforço normal. Em elementos de treliça, arcos, pilares e pórticos esta parcela de deformação deve ser considerada.

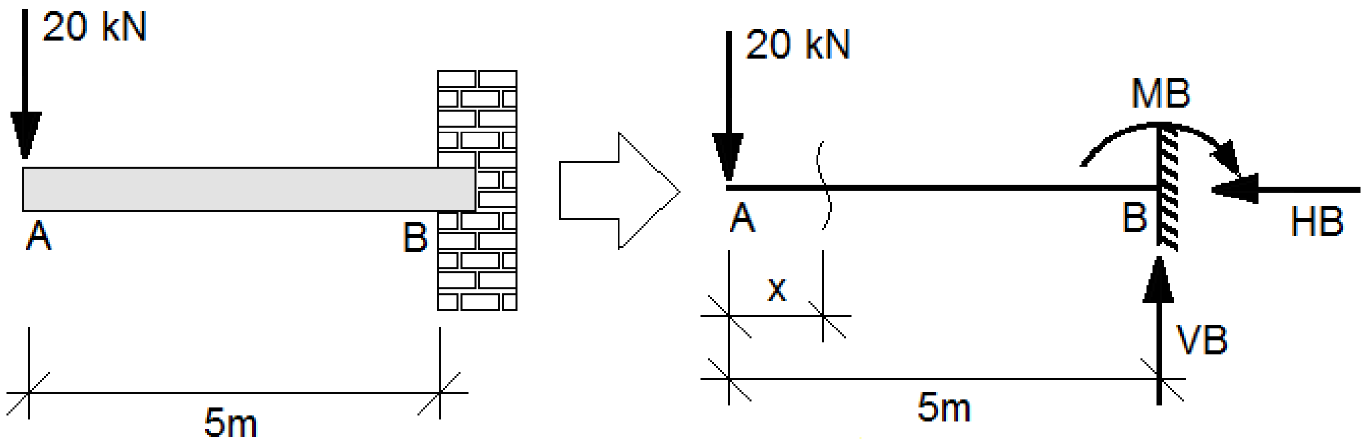
Em estruturas planas, exceto o sistema de grelhas, a parcela $\int \frac{T\overline{T}}{I_P.G}dx$ também pode ser desconsiderada.

Basicamente, a solução para o cálculo dos deslocamentos se resume a:

$$\delta = \int \frac{M\overline{M}}{IE}dx$$

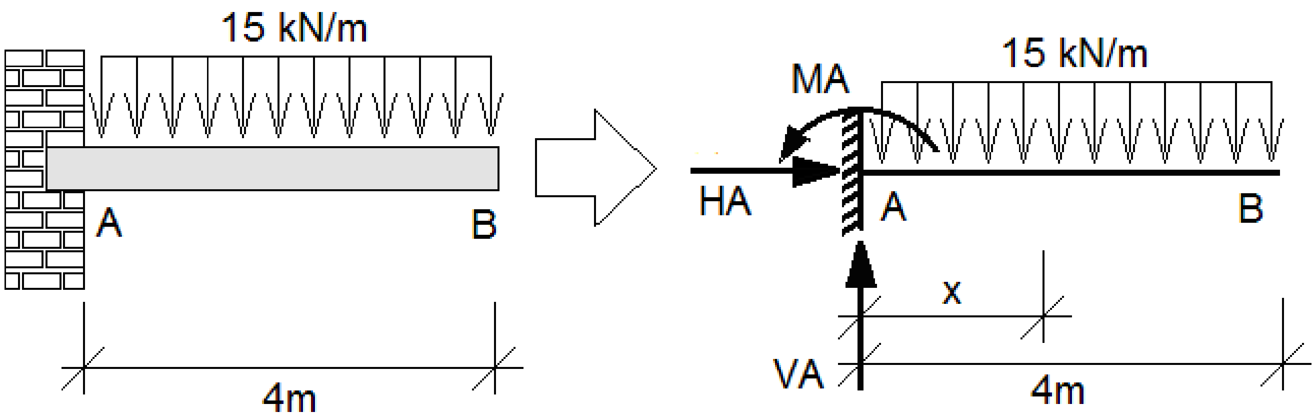
INSTITUTO FEDERAL
Sul-rio-grandense
Câmpus
Passo Fundo

Exemplo 01 – Uma viga de 5 metros em balanço é construída em aço (E=200 GPa), possui um momento de inércia I= $122 \cdot 10^6$ mm4 e está carregada conforme a figura. Aplicando o método da carga unitária, determine a inclinação e a deflexão do ponto A.



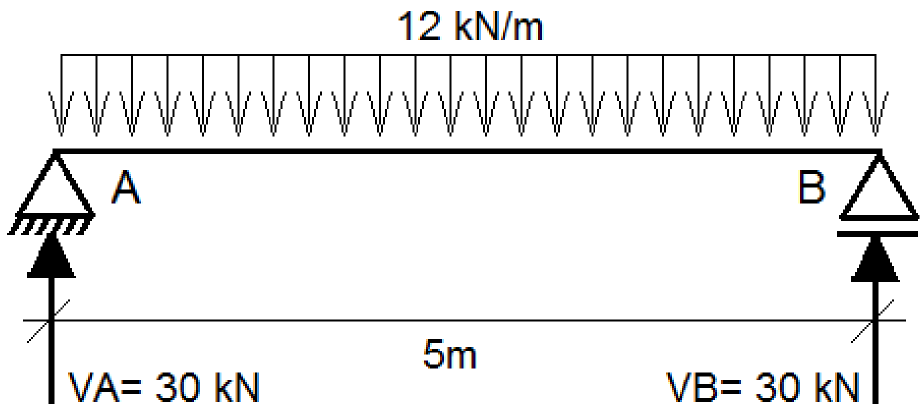
INSTITUTO FEDERAL Sul-rio-grandense Câmpus Passo Fundo

Exemplo 02 – Uma viga com seção transversal de 15x40 cm feita em concreto armado (E=25 GPa) está em balanço e carregada conforme ilustra a figura. Aplicando o método da carga unitária, determine a inclinação e a deflexão do ponto B.



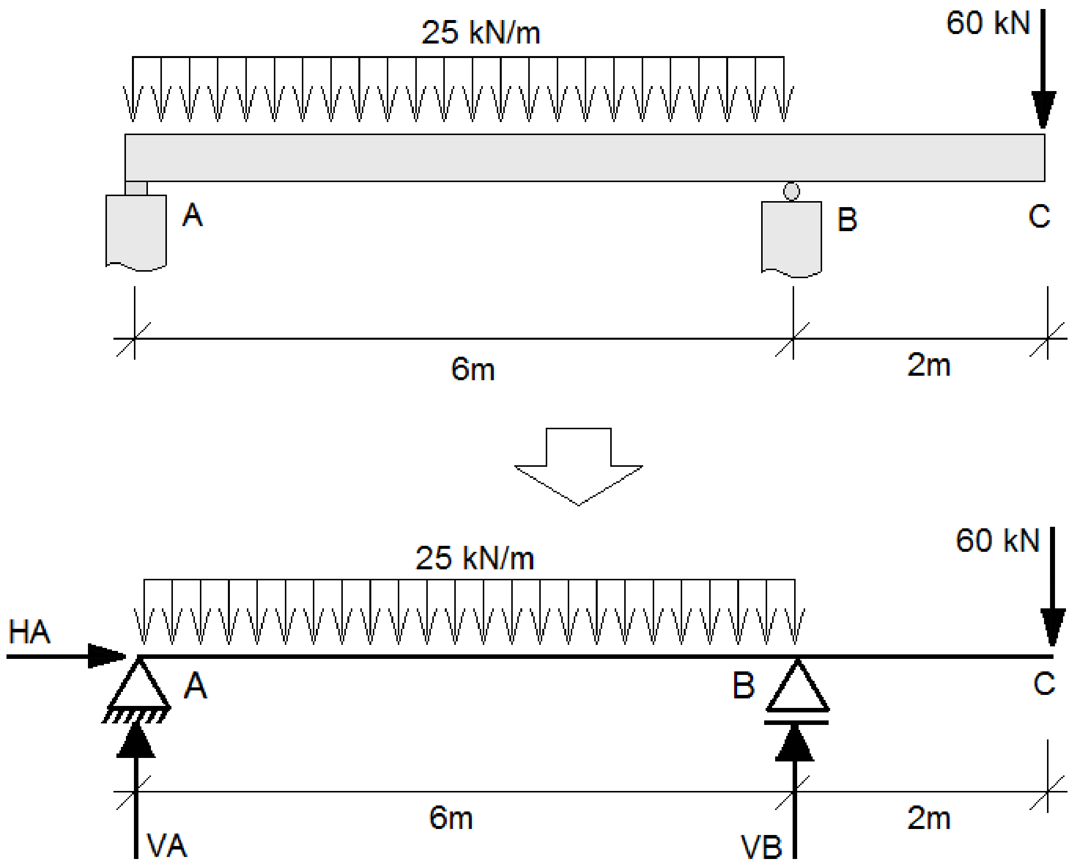
INSTITUTO FEDERAL
Sul-rio-grandense
Câmpus
Passo Fundo

Exemplo 03 – Uma viga biapoiada em aço (E=200 GPa) possui momento de inércia $I=25{,}8\cdot10^6$ mm4 e está submetida a um carregamento como mostra a figura. Determinar a deflexão no centro do vão.

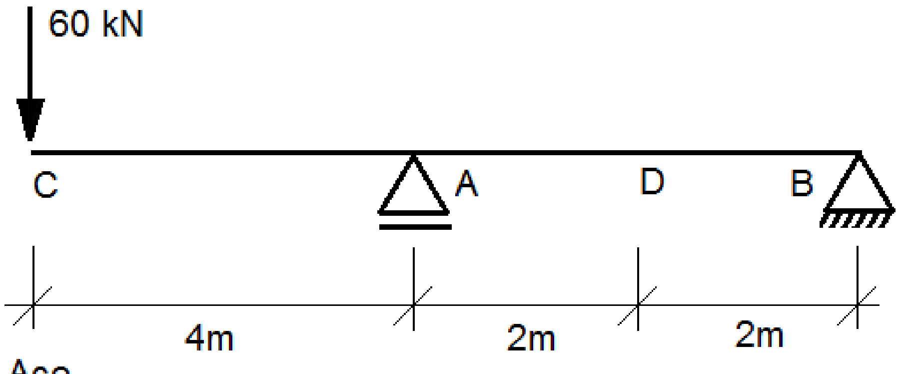


INSTITUTO FEDERAL
Sul-rio-grandense
Câmpus
Passo Fundo

Exemplo 04 – A viga de seção transversal de 12x40 cm, em concreto armado (E=23 GPa), está carregada como ilustrado. Pelo método da carga unitária, a deflexão no ponto C.

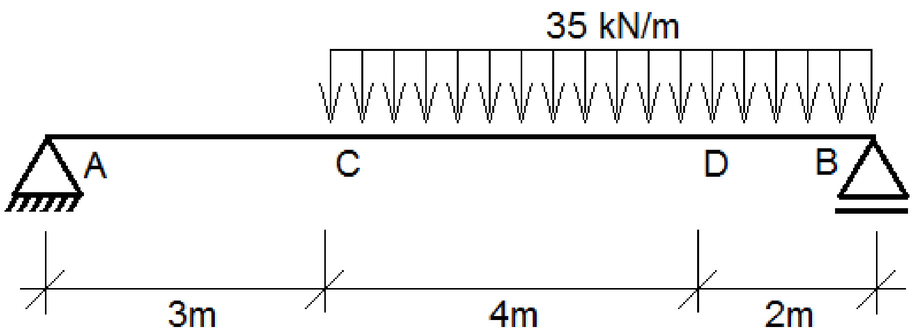


<u>Exercícios Propostos 01</u> – Para as vigas seguintes, determinar a inclinação (rotação) nos apoios A e B e a deflexão nos pontos C e D.



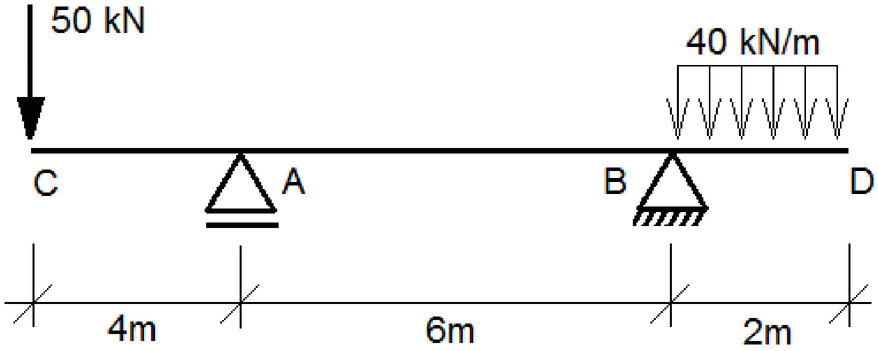
$$\theta_A = 0{,}0584\text{rad}$$
$$\theta_B = -0{,}0292\text{rad}$$
$$\delta_{VC} = -466{,}89mm$$
$$\delta_{VD} = 43{,}77mm$$

Aço
E= 210 GPa
I= 26,11 10^6 mm^4



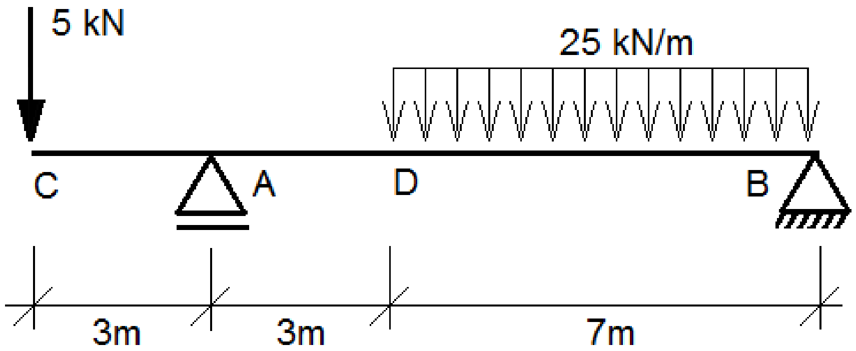
$$\theta_A = -0{,}0089\text{rad}$$
$$\theta_B = 0{,}01015\text{rad}$$
$$\delta_{VC} = -22{,}83mm$$
$$\delta_{VD} = -18{,}32mm$$

Concreto
E= 23 GPa
Seção= 20x60 cm



Aço
E= 210 GPa
I= 29,39 10^6 mm^4

$$\theta_A = 0{,}0778\text{rad}$$
$$\theta_B = -0{,}0583\text{rad}$$
$$\delta_{VC} = -483{,}91mm$$
$$\delta_{VD} = -129{,}62mm$$



Aço
E= 210 GPa
I= 65,7 10^6 mm^4

$$\theta_A = -0{,}0522\text{rad}$$
$$\theta_B = 0{,}0607\text{rad}$$
$$\delta_{VC} = 153{,}45mm$$
$$\delta_{VD} = -141{,}14mm$$

Método da carga unitária com o uso de tabelas

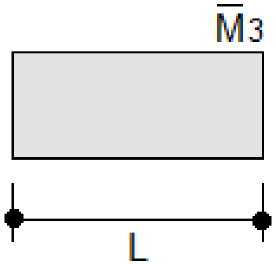
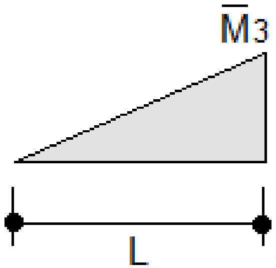
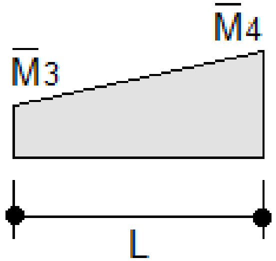
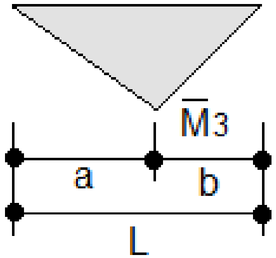
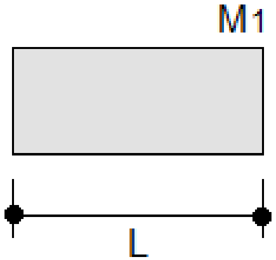
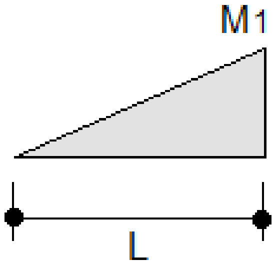
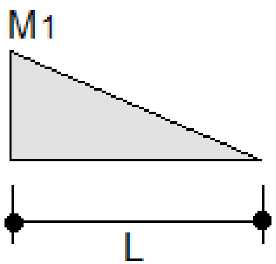
A determinação dos deslocamentos em sistemas estruturais é possível através do emprego de tabelas para o cálculo das integrais. Este procedimento é empregável no caso de estruturas compostas por <u>barras retas</u> e com <u>inércia constante</u> e dispensa a necessidade das equações que representam a variação dos esforços, bastando apenas o conhecimento dos diagramas.

$$\delta = \sum \frac{1}{EI_c} \left| \left(\frac{I_c \cdot}{I_{barra}} \int_0^l M\,\overline{M}\,dx \right) \right|_{Tabelado}$$

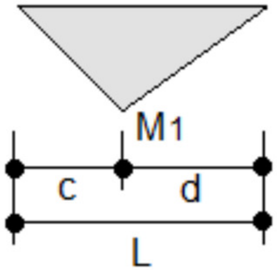
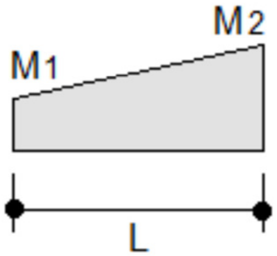
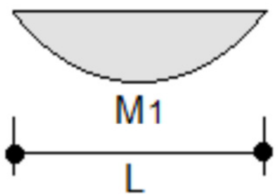
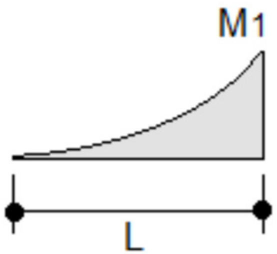
$$\frac{I_{barra} \cdot}{l_{barra}} = \frac{I_c \cdot}{L} \rightarrow L = l\,\frac{I_c \cdot}{I}$$

M \ M	M_3, L	M_3, L	M_3, M_4, L	M_3, a, b, L
M_1, L	$M_1M_3.L$	$\frac{1}{2}M_1M_3.L$	$\frac{1}{2}M_1(M_3+M_4).L$	$\frac{1}{2}M_1M_3.L$
M_1, L	$\frac{1}{2}M_1M_3.L$	$\frac{1}{3}M_1M_3.L$	$\frac{1}{6}M_1(M_3+2M_4).L$	$\frac{1}{6}M_1M_3(L+a)$
M_1, L	$\frac{1}{2}M_1\overline{M}_3.L$	$\frac{1}{6}M_1M_3.L$	$\frac{1}{6}M_1(2M_3+M_4)L$	$\frac{1}{6}M_1M_3(L+b)$
M_1, c, d, L	$\frac{1}{2}M_1M_3.L$	$\frac{1}{6}M_1M_3(L+c)$	$\frac{1}{6}M_1M_3(L+d)$ $+\frac{1}{6}M_1M_4(L+c)$	Para $c \leq a$ $\left(\frac{1}{3}-\frac{(a-c)^2}{6ad}\right)M_1M_3.L$
M_1, M_2, L	$\frac{1}{2}(M_1+M_2)M_3.L$	$\frac{1}{6}(M_1+2M_2)M_3.L$	$\frac{1}{6}(2M_1+M_2)M_3.L$ $+\frac{1}{6}(M_1+2M_2)M_4.L$	$\frac{1}{6}M_1M_3(L+b)$ $+\frac{1}{6}M_2M_3(L+a)$
M_1, L	$\frac{2}{3}M_1M_3.L$	$\frac{1}{3}M_1M_3.L$	$\frac{1}{3}M_1(M_3+M_4).L$	$\frac{1}{3}M_1M_3(L+\frac{ab}{L})$
tg=0, M_1, L	$\frac{1}{3}M_1M_3.L$	$\frac{1}{4}M_1M_3.L$	$\frac{1}{12}M_1(M_3+3M_4).L$	$\frac{1}{12}M_1M_3(3a+\frac{a^2}{L})$

INSTITUTO FEDERAL
Sul-rio-grandense
Câmpus
Passo Fundo

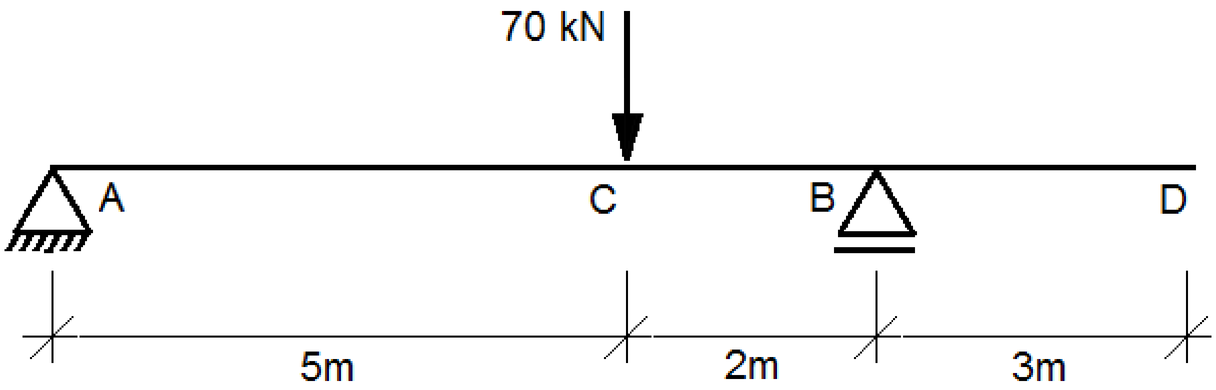
$\bar{M}$ / M	 $\bar{M}_3$, L	 $\bar{M}_3$, L	 $\bar{M}_3$, $\bar{M}_4$, L	 $\bar{M}_3$, a, b, L
 M_1, L	$M_1\bar{M}_3.L$	$\frac{1}{2}M_1\bar{M}_3.L$	$\frac{1}{2}M_1(\bar{M}_3+\bar{M}_4).L$	$\frac{1}{2}M_1\bar{M}_3.L$
 M_1, L	$\frac{1}{2}M_1\bar{M}_3.L$	$\frac{1}{3}M_1\bar{M}_3.L$	$\frac{1}{6}M_1(\bar{M}_3+2\bar{M}_4).L$	$\frac{1}{6}M_1\bar{M}_3(L+a)$
 M_1, L	$\frac{1}{2}M_1\bar{M}_3.L$	$\frac{1}{6}M_1\bar{M}_3.L$	$\frac{1}{6}M_1(2\bar{M}_3+2\bar{M}_4)L$	$\frac{1}{6}M_1\bar{M}_3(L+b)$

INSTITUTO FEDERAL
Sul-rio-grandense
Câmpus
Passo Fundo

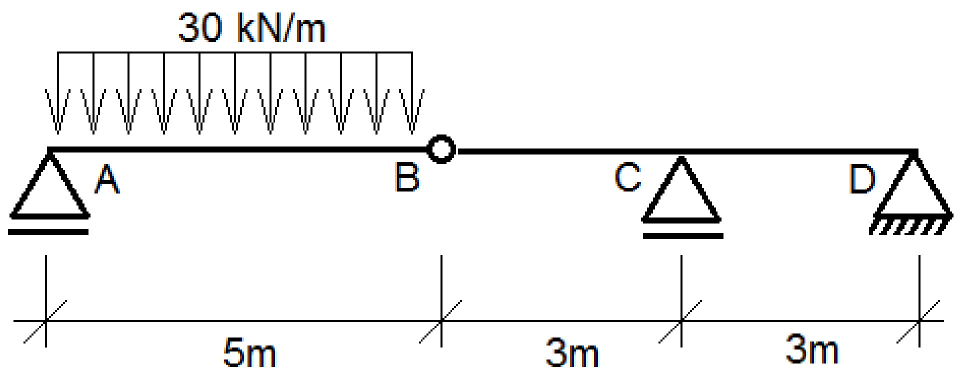
	$\frac{1}{2}M_1\bar{M}_3.L$	$\frac{1}{6}M_1\bar{M}_3(L+c)$	$\frac{1}{6}M_1\bar{M}_3(L+d)$ $+\frac{1}{6}M_1\bar{M}_4(L+c)$	Para $c \leq a$ $\left(\frac{1}{3}-\frac{(a-c)^2}{6ad}\right)M_1\bar{M}_3.L$
	$\frac{1}{2}(M_1+M_2)\bar{M}_3.L$	$\frac{1}{6}(M_1+2M_2)\bar{M}_3.L$	$\frac{1}{6}(2M_1+M_2)\bar{M}_3.L$ $+\frac{1}{6}(M_1+2M_2)\bar{M}_4.L$	$\frac{1}{6}M_1\bar{M}_3(L+b)$ $+\frac{1}{6}M_2\bar{M}_3(L+a)$
	$\frac{2}{3}M_1\bar{M}_3.L$	$\frac{1}{3}M_1\bar{M}_3.L$	$\frac{1}{3}M_1(\bar{M}_3+\bar{M}_4).L$	$\frac{1}{3}M_1\bar{M}_3\left(L+\frac{ab}{L}\right)$
	$\frac{1}{3}M_1\bar{M}_3.L$	$\frac{1}{4}M_1\bar{M}_3.L$	$\frac{1}{12}M_1(\bar{M}_3+3\bar{M}_4).L$	$\frac{1}{12}M_1\bar{M}_3\left(3a+\frac{a^2}{L}\right)$

INSTITUTO FEDERAL
Sul-rio-grandense
Câmpus
Passo Fundo

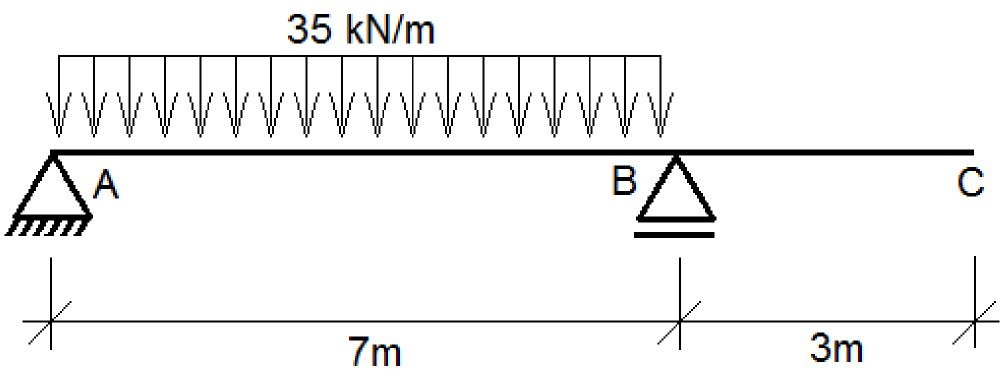
Exemplo 05 – A viga da Figura 8.47 possui seção transversal de 15x50 cm em concreto armado (E=24 GPa) e está carregada como ilustrado. Empregando a Tabela para o cálculo das integrais, determine o deslocamento vertical do ponto D.



<u>Exemplo 06</u> –A viga Gerber da Figura será construída em concreto armado, com módulo de elasticidade E= 23 GPa e seus elementos possuem uma seção transversal de 20x60. Usando a Tabela para o cálculo das integrais, determine o deslocamento vertical do ponto B e a rotação do nó A.

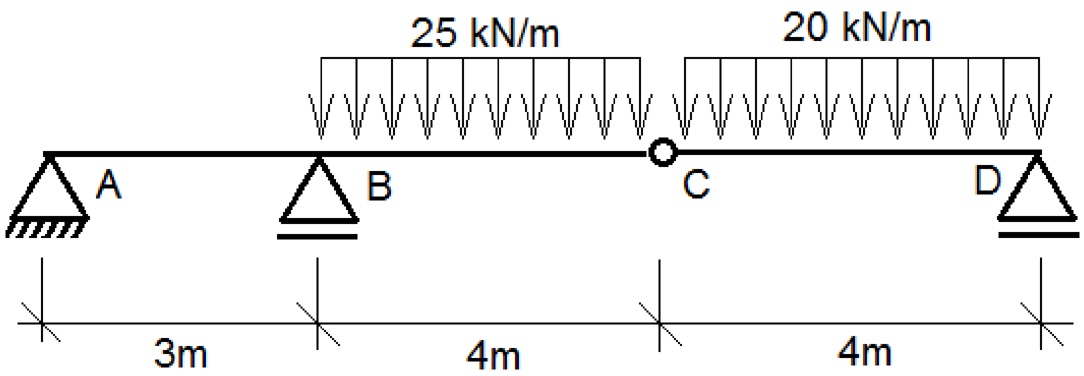


Exercícios Propostos 02 – Empregando a Tabela, determinar a inclinação (rotação) nos apoios A e B e o deslocamento vertical do ponto C para as vigas seguintes.



Concreto
E= 24 GPa
Seção= 15x40 cm

$$\theta_A = -0{,}02605\text{rad}$$
$$\theta_B = 0{,}02605\text{rad}$$
$$\delta_{VC} = 78{,}16mm$$



Aço
E= 210 GPa
I= 29,39 10^6 mm^4

$$\theta_A = 0{,}02916\text{rad}$$
$$\theta_B = -0{,}05833\text{rad}$$
$$\delta_{VC} = -501{,}20mm$$

INSTITUTO FEDERAL
Sul-rio-grandense
Câmpus Passo Fundo

INSTITUTO FEDERAL
Sul-rio-grandense
Câmpus
Passo Fundo

EDUCAÇÃO PÚBLICA 100% GRATUITA

MUITO OBRIGADO

Prof. Rodrigo Bordignon
Engenheiro Civil, Dr.

www.ifsul.edu.br
rodrigobordignon@ifsul.edu.br.