

Lista de exercícios 3

- 1) Explique por que a função dada é uma função contínua por partes e calcule sua integral.

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} 2x, & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 + \cos x, & \text{se } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$$

- 2) Quais das seguintes integrais abaixo são impróprias? Por quê?

a) $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x dx$ b) $\int_0^{\pi} \operatorname{tg} x dx$ c) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 - x - 2}$ d) $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx$

- 3) Determine se cada integral é convergente ou divergente.

a) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+x} dx$ b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{9+x^6} dx$ c) $\int_0^{\pi} \operatorname{tg} x dx$
 d) $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{3-4x} dx$ e) $\int_{-2}^{14} \frac{1}{\sqrt[4]{x+2}} dx$ f) $\int_0^{\infty} \sin^2 x dx$

- 4) (a) Mostre que $\int_{-\infty}^{+\infty} x dx$ é divergente.

(b) Mostre que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-t}^t x dx = 0$.

Note que $\int_{-\infty}^{+\infty} x dx \neq \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-t}^t x dx$. Isso mostra que não podemos definir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-t}^t f(x) dx.$$

- 5) Esboce a região $R = \{(x, y) \mid x \leq 0, 0 \leq y \leq e^x\}$ e encontre a sua área.

- 6) A Transformada de Laplace de uma função $f(x)$ é definida por $\mathcal{L}\{f(x)\} = \int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x) dx$ para os valores de s para os quais a integral converge. Mostre que $\mathcal{L}\{1\}$, isto é, a Transformada de Laplace da função constante $f(x) = 1$, está definida para todo $s > 0$ e $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$.

- 7) Uma aplicação interessante das integrais impróprias é estimar a quantidade total de óleo ou gás natural que será produzida por um poço, dada sua taxa de produção. Vamos supor que engenheiros estimaram que um determinado poço pode produzir gás natural a uma taxa de $f(t) = 700e^{-0,2t}$ milhares de metros cúbicos mensais, onde t é o tempo desde o início da produção. Estimar a quantidade total de gás natural que poderá ser extraída desse poço. (Dica: Como queremos conhecer o potencial de produção do poço, assumimos que o mesmo será operado indefinidamente. Então, a quantidade total de gás natural que poderá ser extraída é dada por $\int_0^{+\infty} 700e^{-0,2t} dt$.)

Respostas:

- 1) A função é contínua por partes pois no ponto de descontinuidade os limites laterais existem;
 $\frac{\pi}{2}$
-
- 2) b: pois $x = \frac{\pi}{2}$ é uma assíntota vertical da função; c: pois $x = 1$ é uma assíntota vertical da função;
 d: pois os limites de integração são infinitos.
-
- 3) a) $\ln 2$ b) $\frac{\pi}{9}$ c) Diverge
 d) Diverge e) $\frac{32}{3}$ f) Diverge
-
- 5) *e u.a.*
-
- 7) 3500 milhares de metros cúbicos.