Subespaços Gerados

Seja V um espaço vetorial. Consideremos um subconjunto A = {v_1, v_2, ... , v_n } c V, A ≠ Φ. O conjunto S de todos os vetores de V que são combinações lineares de A em V, é um subespaço vetorial de V. De fato, pois se

$$u = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n \qquad e \qquad v = b_1v_1 + b_2v_2 + \cdots + b_nv_n$$

Subespaços Gerados

são dois vetores quaisquer de S, pode-se escrever que

$$u + v = (a_1 + b_1)v_1 + (a_2 + b_2)v_2 + \cdots + (a_n + b_n)v_n \quad \text{e}$$
$$\alpha u = (\alpha a_1)v_1 + (\alpha a_2)v_2 + \cdots + (\alpha a_n)v_n$$

Tendo em vista que u + v ϵ S e que a.u ϵ S, por serem combinações lineares de v_1, v_2, ..., v_n conclui-se que S é um subespaço vetorial de V. Simbolicamente, o subespaço S é

$$S = \{v \in V \,/\, v = a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n,\ a_1, \ldots, a_n \in R\}$$

Subespaços Gerados

Observações:

1) O subespaço S é chamado *subespaço gerado* pelos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ou gerado pelo conjunto A, e representa-se o mesmo da seguinte forma:

$$\boxed{S = [v_1, v_2, \ldots, v_n] \quad \text{ou} \quad S = G(A), \quad \text{onde} \quad A = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}}$$

Os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são chamados ***geradores*** do subespaço S, enquanto A é o ***conjunto gerador*** de S.

Subespaços Gerados

2) Todo conjunto A c V gera um subespaço vetorial de V, podendo ocorrer ***G(A) = V***. Neste caso, A é um conjunto gerador de V.

3) Sendo v = (x,y,z) se o sistema de equações lineares resultante da combinação linear não for consistente, isto é, não tiver solução, então o vetor v não pode ser escrito como combinação linear, logo não gera um espaço.

Subespaços Gerados

Exemplos:

1) Os vetores *i* = (1,0) e *j* = (0,1) geram o espaço vetorial R^2, pois qualquer (x,y) ϵ R^2 é combinação linear de *i* e *j*. Ou seja, *[i , j]* = R^2.

2) Os vetores *i* = (1,0,0), *j* = (0,1,0) do R^3 geram o subespaço S = {(x,y,0) ϵ R^3/ x, y ϵ R}, pois: (x,y,0) = x(1,0,0) +y(0,1,0). Então: *[i , j]* = S é um subespaço próprio do R^3 e representa, geometricamente o plano xOy.

Subespaços Gerados

Exemplos:

3) Os vetores e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1) geram o espaço vetorial R^3, pois qualquer (x,y,z) ϵ R^3 é combinação linear de e_1, e_2, e_3. Ou seja, $[e_1, e_2, e_3] = R^3$

Subespaços Gerados

Exemplos:

1) Mostrar que os vetores A = {(3,1), (5, 2)} gera o R^2.

2) Sejam V = M(2,2) e o subconjunto $A = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

Determinar o subespaço G(A).

Subespaços Gerados

Exemplos:

3) Mostrar que os vetores u = (1, 2, 3), v = (0, 1, 2) e w = (0, 0, 1) geram R^3.

4) Encontrar condições sobre a, b e c de modo que (a, b, c) $\in R^3$ pertença ao subespaço gerado por u = (2, 1, 0), v = (1, -1, 2) e w = (0, 3, -4).

Dependência e Independência Linear

Definição: Sejam **V** um espaço vetorial e os vetores $A=\{v_1,v_2,...,v_n\} \subset$ **V**. Dizemos que o conjunto $\{v_1,v_2,...,v_n\}$ é ***linearmente independente*** (LI), ou que os vetores $v_1,v_2,...,v_n$ são **LI**, se a equação $\boxed{a_1v_1+a_2v_2+\cdots+a_nv_n=0}$ admite apenas a solução trivial, ou seja, $a_1=a_2=a_n=0$. No caso de existirem soluções $a_i \neq 0$ dizemos que A é ***linearmente dependente*** (LD), ou que os vetores $v_1,v_2,...,v_n$ são LD.

Dependência e Independência Linear

Vetores ***linearmente dependentes*** (LD) podem ser caracterizados de outra maneira.

Teorema: $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é LD se, e somente se, um destes vetores for uma combinação linear dos outros.

Exemplo:

Sejam os vetores $v_1 = (2, -1, 3)$, $v_2 = (-1, 0, -2)$ e $v_3 = (2, -3, 1)$ analise se são LI ou LD.

Dependência e Independência Linear

Exemplo: Analise se os vetores são LI ou LD, onde $v_1 = (2,0)$ e $v_2 = (0,5)$.

Observações:

- Os vetores são ***linearmente dependentes*** se, e somente se, um deles é combinação linear dos outros, ou seja, os vetores são colineares entre si.
- Se dois vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são iguais, digamos $v_1 = v_2$, então os vetores são *dependentes*. Pois $v_1 - v_2 = 0$.
- Dois vetores v_1 e v_2 são *dependentes* se, e somente se, um deles é múltiplo do outro.

Dependência e Independência Linear

Propriedades da Dependência e Independência Linear:

Seja V um espaço vetorial então

I) Se A = {*v*} c **V** e v ≠ 0 então A é LI.

II) Se um conjunto A c **V** contém o vetor nulo, então A é LD.

III) Se uma parte de um conjunto A c **V** é LD, então A é também LD.

IV) Se uma parte de um conjunto A c **V** é LI, qualquer parte A_1 de A é também LI.

Base e Dimensão de um Espaço vetorial

Base

Definição: Um conjunto **β** = {$v_1, v_2, ..., v_n$} c **V** é uma base do espaço vetorial **V** se

I) **β** é LI;

II) **β** gera V

Teorema: Se **β** = {$v_1, v_2, ..., v_n$} é uma base de um espaço vetorial **V**, então cada vetor de **V** pode ser expresso da forma $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$ de uma única maneira.

Base e Dimensão de um Espaço vetorial

Exemplo: Verificar se **β** = {(1,1), (-1,0)} é base de R^2.

Dimensão

Corolário: Qualquer base de um espaço vetorial tem sempre o mesmo número de elementos. Este número é chamado *dimensão de V*, e denotado por ***dim V***.

Base e Dimensão de um Espaço vetorial

Exemplos:

1. dim $R^2 = 2$, pois toda base do R^2 tem dois vetores.

2. dim $R^n = n$

3. dim $M(2,2) = 4$

4. dim $M(m,n) = m \times n$

5. dim $\{0\} = 0$

Base e Dimensão de um Espaço vetorial

Observações:

Seja V um espaço vetorial tal que dim V = n. Se S é um subespaço de V, então a dimensão de S ≤ n. No caso da dim S = n, tem-se que S = V. Para permitir uma interpretação geométrica, consideramos o espaço tridimensional R^3, onde a dimensão de qualquer subespaço do R^3 só poderá ser 0, 1, 2 ou 3.

Base e Dimensão de um Espaço vetorial

Portanto, temos os seguintes casos:

I) dim S = 0, então S = {0} é a origem.

II) dim S = 1, então S é uma reta que passa pela origem.

III) dim S = 2, então S é um plano que passa pela origem.

IV) dim S = 3, então S é o próprio R^3.

Base e Dimensão de um Espaço vetorial

Uma forma prática para determinar a dimensão de um espaço vetorial é <u>verificar</u> o <u>***número de variáveis livres***</u> de seu vetor genérico. Esse <u>*número*</u> é a **dimensão** do espaço.

Base e Dimensão de um Espaço vetorial

Teorema: Dada uma base $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de V, cada vetor de V é escrito de maneira única como combinação linear de $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Exemplos: Determinar a dimensão e uma base do espaço vetorial $S = \{(x, y, z) \in R^3 / 2x + y + z = 0\}$