Engenharia Civil e Engenharia Mecânica

Espaços Vetoriais com Produto Interno

Seja V um espaço vetorial real. Um produto interno sobre **V** é uma função que a cada par de vetores, u e v, associa um numero real, denotado por **<u,v>** ou ***u.v***, satisfazendo os seguintes axiomas:

Espaços Vetoriais com Produto Interno

i) $u \bullet u \geq 0 \;\; e \;\; u \bullet u = 0 \;\; se \;\; u = 0$ [Axioma de positividade]

ii) $(\alpha u) \bullet v = \alpha (u \bullet v)$ para todo α real [Axioma de homogeneidade]

iii) $u \bullet (v + w) = u \bullet v + u \bullet w$ [Axioma de aditividade]

iv) $u \bullet v = v \bullet u$ [Axioma de simetria]

Espaços Vetoriais com Produto Interno

Um espaço vetorial real com um produto interno é chamado **espaço com produto interno real**.

Sendo $u = (x_1,y_1)$ e $v = (x_2,y_2)$ definimos o *produto escalar* do R^2 da seguinte forma: $\mathbf{u.v = x_1. x_2 + y_1.y_2}$

Analogamente define-se o produto escalar do R^3, R^4, ..., R^n.

Espaços Vetoriais com Produto Interno

Vetores Ortogonais:

Seja **V** um espaço vetorial euclidiano (é um espaço vetorial real, de dimensão finita, no qual está definido um produto interno). Diz-se que dois vetores u e v são ortogonais se, e somente se, $(u \bullet v) = 0, \ ou \ seja \ u \perp v$.

Espaços Vetoriais com Produto Interno

Seja V = R^2 um espaço vetorial euclidiano em relação ao produto interno $\boxed{(x_1, y_1)\bullet(x_2, y_2) = x_1x_2 + y_1y_2}$. Em relação a este produto interno, os vetores (-3,4) e (4,3) são ortogonais, pois: u.v = -3.(4) + (4).(3) = 0.

Espaços Vetoriais com Produto Interno

Conjunto ortogonal de Vetores:

Seja **V** um espaço vetorial euclidiano. Diz-se que um conjunto de vetores $\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\} \subset$ **V** é ***ortogonal*** se dois vetores quaisquer, distintos, são ortogonais, isto é, $v_i . v_j = 0$ para $i \neq j$. Por exemplo, o conjunto {(1,2,-3), (3,0,1), (1,-5,-3)} é ortogonal em relação ao produto interno usual, pois os vetores deste conjunto são ortogonais dois a dois.

.

Espaços Vetoriais com Produto Interno

Teorema

Um conjunto ortogonal de vetores não nulos

$A = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ é linearmente independente (LI).

Observação: a recíproca deste teorema não é verdadeira, ou seja, se o conjunto B é LI, isso não significa que B é ortogonal. Por exemplo, é um conjunto de vetores LI, mas B não é um conjunto ortogonal.

Espaços Vetoriais com Produto Interno

Base Ortogonal

Diz-se que uma base $\{v_1, v_2, v_3, ..., v_n\}$ de **V** é *ortogonal* se os seus vetores são dois a dois ortogonais. Logo o conjunto B = {(1,2,-3), (3,0,1), (1,-5,-3)} é uma base ortogonal do R^3.

Espaços Vetoriais com Produto Interno

Base Ortonormal

Uma base B = {$v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ } de um espaço vetorial euclidiano **V** é *ortonormal* se B é ortogonal e todos os seus vetores são unitários.

Exemplo:

Verifique se $B = \left\{ \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right\}$ é uma base ortonormal do R^2.

Espaços Vetoriais com Produto Interno

Observação

Já vimos que se *v* é um vetor não nulo, o vetor é unitário $\frac{v}{|v|}$. Diz-se, nesse caso, que *v* está *normalizado*. O processo que transforma *v* em $\frac{v}{|v|}$ chama-se *normalização* de v.

Assim, uma base ortonormal sempre pode ser obtida de uma base ortogonal normalizando cada vetor.

Espaços Vetoriais com Produto Interno

Exemplo:

A base $B = \{v_1, v_2, v_3, ..., v_n\}$, sendo $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (-2,1,1)$ e $v_3 = (0,-1,1)$ é ortogonal em relação ao produto interno usual. Normalizando cada vetor obtemos uma base ortonormal do R^3. Determinar esta base ortonormal.

Espaços Vetoriais com Produto Interno

Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt

Dado um espaço vetorial euclidiano **V** e uma base qualquer $B = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ desse espaço, é possível, a partir dessa base, determinar uma base ortogonal de **V**.

Espaços Vetoriais com Produto Interno

Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt

De fato, supondo que $\{v_1, v_2, v_3, ..., v_n\}$ não são ortogonais e, considerando que $w_1 = v_1$, determinamos o valor de **α** de modo que o vetor $w_2 = v_2 - \alpha . w_1$ seja ortogonal a w_1, ou seja:

Espaços Vetoriais com Produto Interno

Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt

$$w_2 \bullet w_1 = 0$$

$$(v_2 - \alpha w_1) \bullet w_1 = 0$$

$$v_2 \bullet w_1 - \alpha(w_1 \bullet w_1) = 0$$

$$\alpha = \frac{v_2 \bullet w_1}{w_1 \bullet w_1}$$

$$w_2 = v_2 - \left(\frac{v_2 \bullet w_1}{w_1 \bullet w_1} \right) w_1$$

Espaços Vetoriais com Produto Interno

Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt

Assim w_1 e w_2 são ortogonais.

Analogamente determina-se w_3 onde

$$w_3 = v_3 - \left(\frac{v_3 \bullet w_2}{w_2 \bullet w_2}\right) \cdot w_2 - \left(\frac{v_3 \bullet w_1}{w_1 \bullet w_1}\right) \cdot w_1 \ ,$$

onde w_1, w_2 e w_3 são ortogonais.

Espaços Vetoriais com Produto Interno

Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt

O processo que permite a determinação de uma base ortogonal a partir de uma base qualquer chama-se *processo de ortogonalização de Gram-Schmidt*.

Para se obter uma base ortonormal, basta normalizar cada w_i, fazendo $u_i = \dfrac{w_i}{|w_i|}$.

Espaços Vetoriais com Produto Interno

Exemplo:

Sejam $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (0,1,1)$ e $v_3 = (0,0,1)$ vetores do R^3. Esses vetores constituem uma base $B = \{v_1,v_2,v_3,...,v_n\}$ não ortogonal em relação ao produto interno usual. Obtenha a partir de B uma base $B' = \{w_1,w_2,w_3\}$ que seja ortonormal.