INSTITUTO FEDERAL
Sul-rio-grandense
Câmpus
Passo Fundo

EDUCAÇÃO PÚBLICA 100% GRATUITA

Introdução ao MEF

03 – Método direto aplicado à problemas unidimensionais

PROBLEMAS UNIDIMENSIONAIS

A energia potencial total e o método direto a partir das relações tensão-deformação e deformação-deslocamento são usadas no desenvolvimento do método dos elementos finitos para problema unidimensionais, sendo o procedimento básico para problemas bidimensionais e tridimensionais.

Para o problema unidimensional, a tensão, a deformação, o deslocamento e o carregamento dependem apenas da variável x.

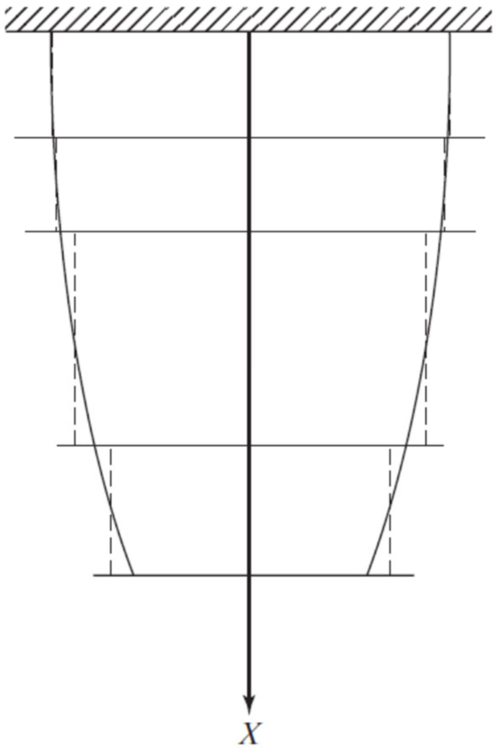
As relações tensão-deformação específica e deformação específica-deslocamento são:

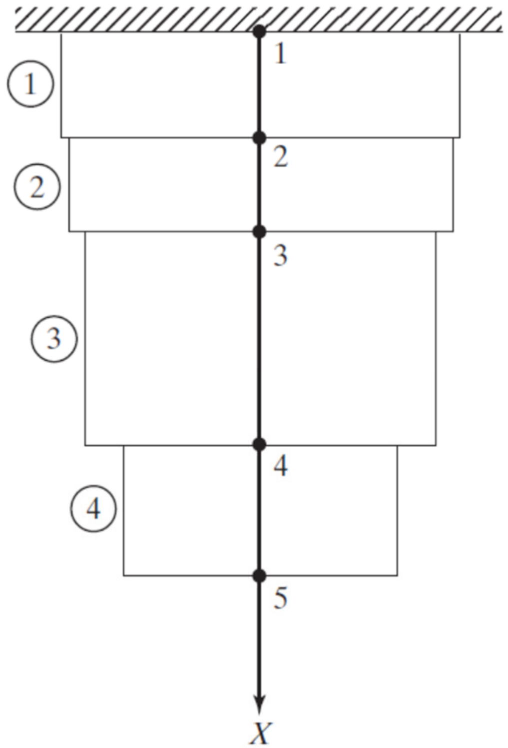
$$\sigma = E\epsilon \quad \epsilon = \frac{du}{dx}$$

MODELAGEM DE ELEMENTOS FINITOS

DIVISÃO DE ELEMENTOS

O primeiro passo é modelar a barra como um eixo escalonado, composto por um número discreto de elementos, cada um com seção transversal uniforme.



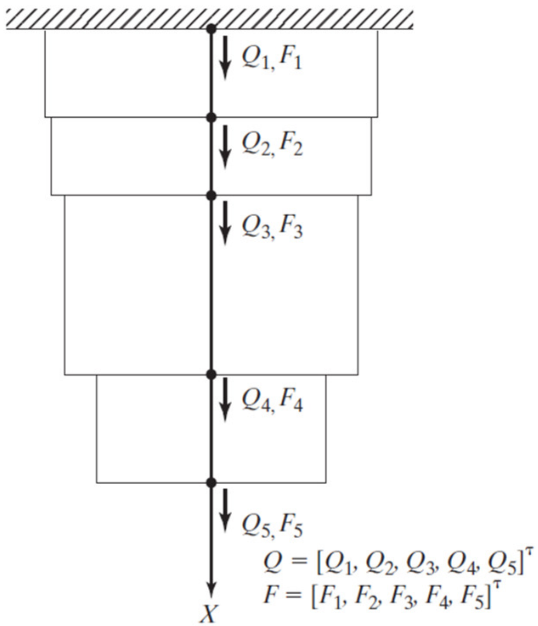


ESQUEMA DE NUMERAÇÃO

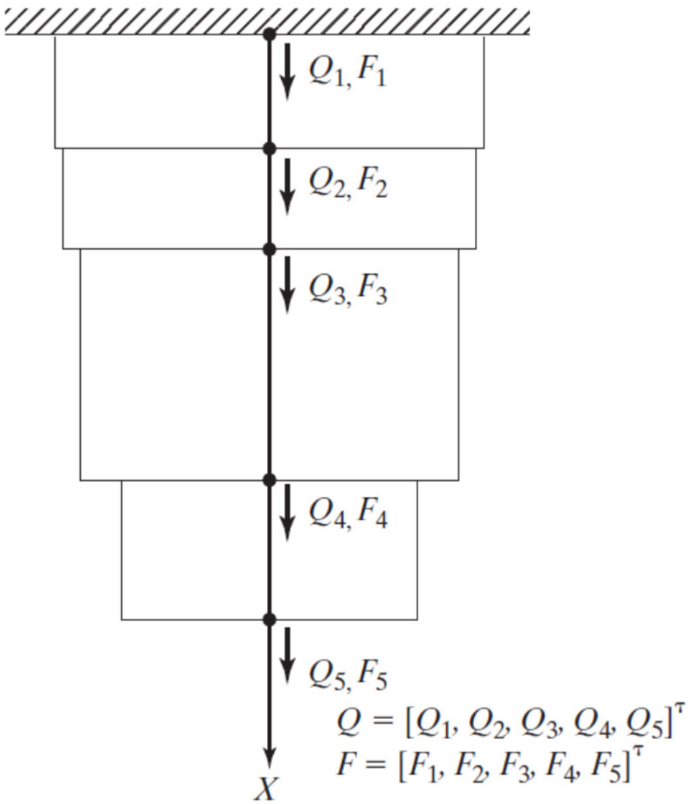
Em um problema unidimensional, cada nó se desloca apenas na direção x, possuindo assim apenas um grau de liberdade (gl).

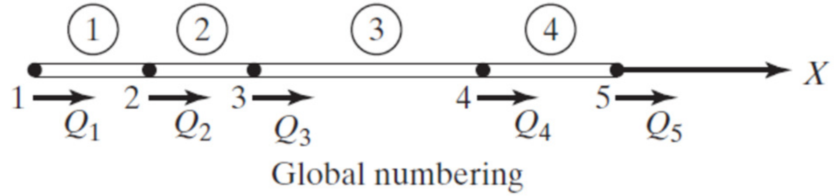
Os deslocamentos ao longo de cada gl são denotados por Q1, Q2, ..., Q5 é chamado de vetor deslocamento global.

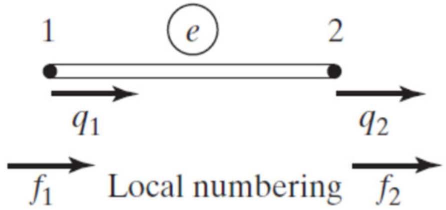
O vetor de carga global é denotado por F = F1, F2, ..., F5.



ESQUEMA DE NUMERAÇÃO







Elements	Nodes		
e	1	2	Local numbers
1	1	2	Global numbers
2	2	3	
3	3	4	
4	4	5	

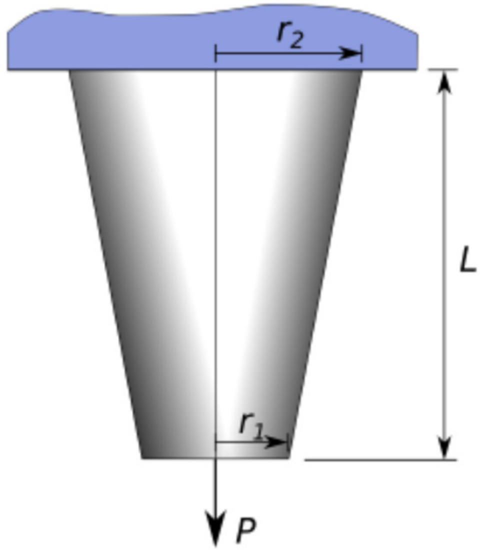
Exemplo 3.2 - Considere que a barra mostrada na figura tem uma seção transversal circular variável com r_1 = 12,5 mm e r_2 = 50 mm; E = 200 GPa; L = 1000 mm; e P = 1,0 kN. Determinar a partir do método direto (matricial):

a) o deslocamento máximo considerando 1 elemento;

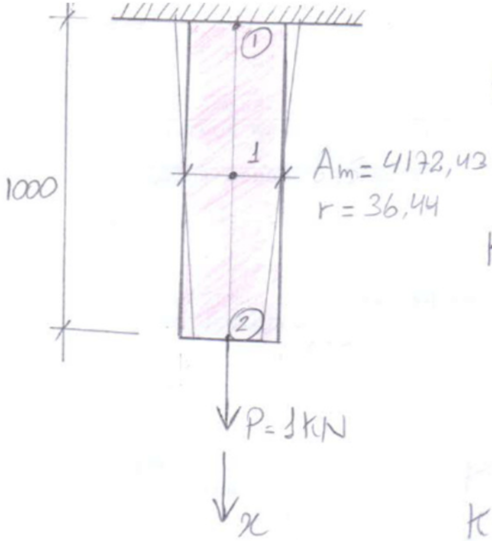
b) o deslocamento máximo considerando 2 elementos;

c) o deslocamento máximo considerando 3 elementos;

d) comparar os resultados obtidos acima com a solução analítica.



a) o deslocamento considerando 1 elemento:



$$A_1 = \pi \cdot 50^2 = 7853,98$$

$$A_2 = \pi \cdot 12,5^2 = 490,87$$

$$\underline{A_m = 4172,43\ mm^2}$$

$$K = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ \left[\begin{array}{cc} 834,49 & -834,49 \\ -834,49 & 834,49 \end{array}\right] & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \end{array}$$

$$[K] \cdot \{u\} = \{F\}$$

$$\Downarrow$$

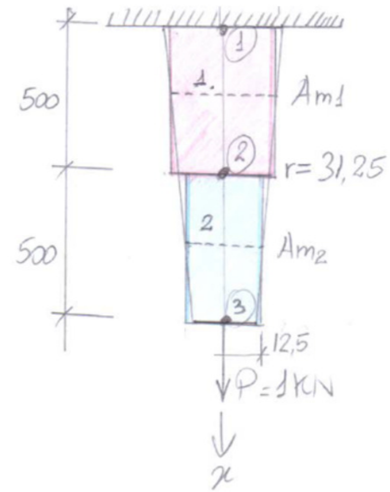
$$\begin{bmatrix} 834,49 & -834,49 \\ -834,49 & 834,49 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Sendo $u_1 = 0$:

$$\boxed{u_2 = 1,198 \cdot 10^{-3}\ mm}$$

b) o deslocamento considerando 2 elementos:

b)



$E = 200\ GPa$

$A_{m1} = 5460,97\ mm^2$

$L_1 = 500\ mm$

$A_{m2} = 1779,42\ mm^2$

$L_2 = 500\ mm$

$$k = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \Rightarrow k_1 = \begin{bmatrix} 2184,39 & -2184,39 \\ -2184,39 & 2184,39 \end{bmatrix} \quad k_2 = \begin{bmatrix} 711,77 & -711,77 \\ -711,77 & 711,77 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 2184,39 & -2184,39 & 0 \\ 2 & -2184,39 & 2896,16 & -711,77 \\ 3 & 0 & -711,77 & 711,77 \end{array} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow [k]\{u\} = \{F\}$$

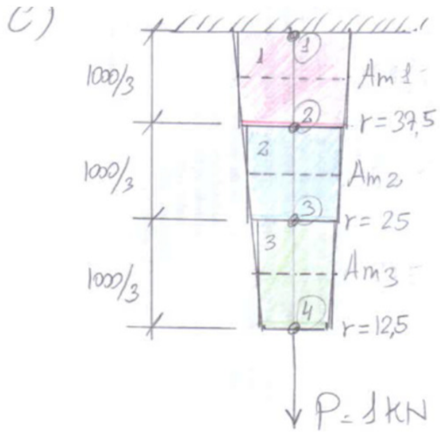
Sendo $u_1 = 0$ e pelo método da eliminação:

$$\begin{bmatrix} 2896,16 & -711,77 \\ -711,77 & 711,77 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} u_2 &= 4,578 \cdot 10^{-4}\ mm \\ u_3 &= 1,863 \cdot 10^{-3}\ mm \end{aligned}}$$

c) o deslocamento considerando 3 elementos:

c)



$E = 200\,GPa$

$A_{m1} = 6135,92\ mm^2$

$L_1 = 333,33\ mm$

$A_{m2} = 3190,68\ mm^2$

$L_2 = 333,33\ mm$

$A_{m3} = 1227,19\ mm^2$

$L_3 = 333,33\ mm$

$$K_1 = \begin{bmatrix} 3681,55 & -3681,55 \\ -3681,55 & 3681,55 \end{bmatrix} \quad K_2 = \begin{bmatrix} 1914,41 & -1914,41 \\ -1914,41 & 1914,41 \end{bmatrix} \quad K_3 = \begin{bmatrix} 736,31 & -736,31 \\ -736,31 & 736,31 \end{bmatrix}$$

$$[K]\{u\} = \{F\}$$

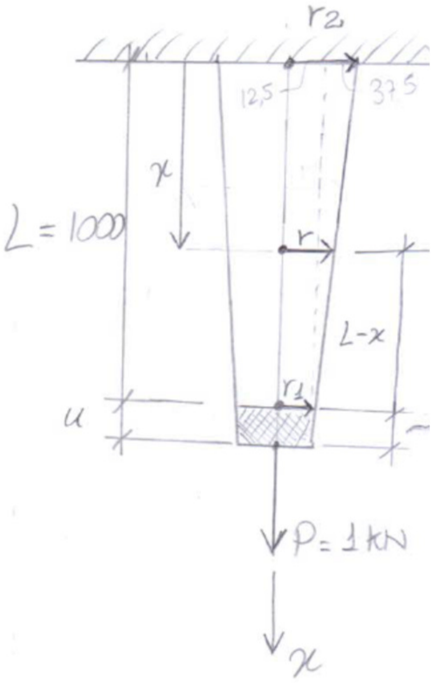
$$\begin{bmatrix} 3681,55 & -3681,55 & 0 & 0 \\ -3681,55 & 5595,62 & -1914,41 & 0 \\ 0 & -1914,41 & 2650,72 & -736,31 \\ 0 & 0 & -736,31 & 736,31 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Sendo $u_1 = 0$, por eliminação temos:

$$\begin{bmatrix} 5595,62 & -1914,41 & 0 \\ -1914,41 & 2650,72 & -736,31 \\ 0 & -736,31 & 736,31 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} u_2 &= 2,716 \cdot 10^{-4}\ mm \\ u_3 &= 7,94 \cdot 10^{-4}\ mm \\ u_4 &= 2,152 \cdot 10^{-3}\ mm \end{aligned}}$$

d) solução analítica:



- Área média $\Rightarrow$ $u = \dfrac{P.L}{A.E} = \dfrac{1.1000}{\pi\left(\dfrac{12{,}5^2+50^2}{2}\right).200} = \boxed{1{,}198.10^{-3}\,mm}$

- Área variável $\Rightarrow$ $u = \displaystyle\int_0^L \dfrac{P\,dx}{E\,A(x)} \Rightarrow \boxed{u = \dfrac{P}{E}\displaystyle\int_0^L \dfrac{dx}{(\pi r^2)}}$

$$\frac{x}{r_2 - r} = \frac{L - x}{r - r_1}$$

$$x(r - r_1) = (L - x)(r_2 - r)$$

$$\cancel{xr} - x r_1 = L r_2 - L r - x r_2 + \cancel{xr}$$

$$L r = L r_2 - x r_2 + x r_1$$

$$L r = L r_2 - x(r_2 - r_1)$$

$$r = r_2 - \frac{x(r_2 - r_1)}{L}$$

$$r = 50 - \frac{x(50 - 12{,}5)}{1000}$$

$$\boxed{r = 50 - 0{,}0375x}$$

$$u = \frac{P}{E\pi}\int_0^L \frac{dx}{r^2}$$

sendo $r = f(x) \Rightarrow r = 50 - 0{,}0375x$

$$\boxed{\frac{dr}{dx} = -0{,}0375}$$

logo: $dx = -\dfrac{dr}{0{,}0375}$

$$u = \frac{P}{E}\int_{r_2}^{r_1} -\frac{dr}{\pi . 0{,}0375 . r^2}$$

$$u = \frac{P}{E . \pi . 0{,}0375}\int_{r_2}^{r_1} -\frac{dr}{r^2}$$

$$u = \frac{P}{E . \pi . 0{,}0375}\left[+\frac{1}{r}\right]_{r_2}^{r_1}$$

$$u = \frac{P}{E . \pi . 0{,}0375}\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right]$$

$$u = \frac{1}{200 . \pi . 0{,}0375}\left[\frac{1}{12{,}5} - \frac{1}{50}\right]$$

$$\boxed{u = 2{,}546 . 10^{-3}\,mm}$$

INSTITUTO FEDERAL
Sul-rio-grandense
Câmpus
Passo Fundo

EXERCÍCIO PROPOSTO 3.1 – Considere a chapa de aço mostrada na figura para determinar, a partir do Método Direto (matricial), os:

a) deslocamentos nodais máximos considerando 1 elemento;

b) deslocamentos nodais máximos considerando 2 elementos;

c) deslocamentos nodais máximos considerando 4 elementos;

d) comparar os resultados obtidos acima com a solução analítica.

[2,0 pontos]

Dados:

e = (8 + #) N/mm;

a = (200 - 10#) mm;

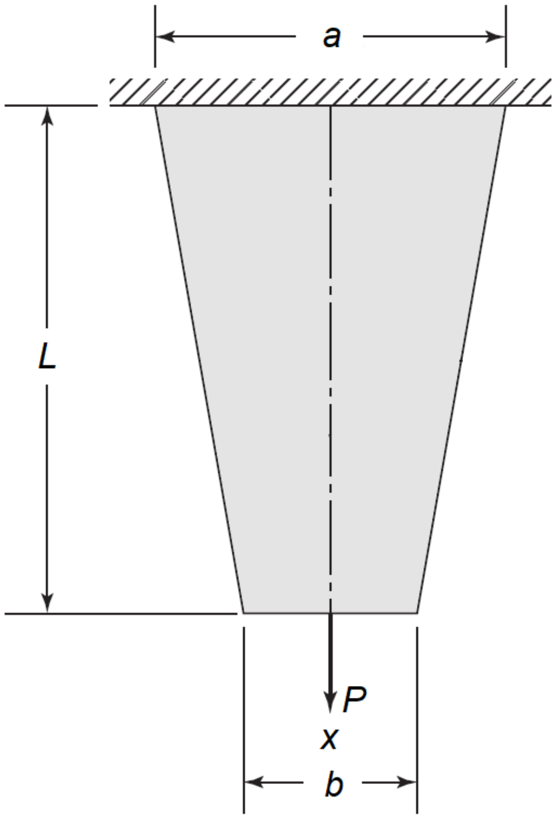
b = (50 + 10#) mm;

L = (500 + 10#) mm;

E = 200 GPa;

P = 315 kN.

#	Matrícula	Nome
1	20211PF.ECV0023	Carlos Eduardo Argenta Bordin
2	20211PF.ECV0006	Eduardo Vidal
3	20211PF.ECV0007	Gabriela Santos de Almeida
4	20211PF.ECV0015	Luciana Lombardi Barnekow
5	20211PF.ECV0003	Tainara dos Santos Ribeiro
6	20211PF.ECV0002	Victor Berton dal Olmo



d) solução analítica:

$$A(x) = c \cdot e$$

$$A(x) = (-0{,}3x + 200) \cdot 8$$

$$\boxed{A(x) = -2{,}4x + 1600}$$

$$u = \int_0^L \frac{P\,dx}{E\,A(x)}$$

$$u = \frac{P}{E} \int_0^L \frac{dx}{-2{,}4x + 1600}$$

$$u = \frac{P}{E} \int_0^L \frac{dx}{-\frac{5}{12}x + 1600}$$

$$u = \frac{P}{E} \left[\frac{5 \ln(2000)}{12} - \frac{5 \ln(|3.L - 2000|)}{12} \right]_0^{500}$$

$$u = \frac{P}{E} \left[3{,}167 - 2{,}589 \right]$$

$$u = \frac{315\,kN\,(0{,}5776)}{200\,kN/mm^2}$$

$$\boxed{u = 0{,}91\,mm}$$

INSTITUTO FEDERAL
Sul-rio-grandense
Câmpus
Passo Fundo

EDUCAÇÃO PÚBLICA 100% GRATUITA

MUITO OBRIGADO

Prof. Rodrigo Bordignon
Engenheiro Civil, Dr.

www.ifsul.edu.br
rodrigobordignon@ifsul.edu.br