Engenharia Civil

Integrais

INSTITUTO FEDERAL
SUL-RIO-GRANDENSE
Campus Passo Fundo

Engenharia Civil

Ementa

INTEGRAL INDEFINIDA

- Conceito e propriedades da integral indefinida;
- Técnicas de integração: substituição e partes;
- Integração por substituição trigonométrica;
- Integração de funções racionais por frações parciais;

Engenharia Civil

Ementa

INTEGRAL DEFINIDA

- Conceito e propriedades da integral definida;
- Teorema fundamental do cálculo;
- Cálculo de áreas, comprimento de arcos, volumes e volumes de revolução;
- Integrais impróprias;
- Integrais múltiplas;

Anti-diferencial ou Integral

Chama-se antidiferenciação ou integração a operação inversa da diferenciação, ou seja: Dada

$$y = f(x) \quad \rightarrow \quad dy = f'(x)\,dx$$

Engenharia Civil

Anti-diferencial ou Integral

Seja f(x) uma função contínua num certo intervalo [a, b].

A primitiva da função f é uma função F(x), tal que: $F'(x) = f(x)$

Exemplos:

1) x^3 é primitiva de $3x^2$?

2) $x^3 + 2$ é primitiva de $3x^2$?

3) $x^3 + 100$ é primitiva de $3x^2$?

4) x^4 é primitiva de $4x$?

INSTITUTO FEDERAL
SUL-RIO-GRANDENSE
Campus Passo Fundo

Engenharia Civil

Anti-diferencial ou Integral

Se F(x) é primitiva de f(x) indicamos: $\boxed{F(x)=\int f(x)\,dx}$.

Mas como F(x) + c também é primitiva da f(x) então podemos indicar:

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + c}$$

O símbolo (operador) $\int$ denota a operação de ***antidiferenciação*** *(Integral)*.

Anti-diferencial ou Integral

O processo de encontrar antiderivadas é denominado antiderivação, antidiferenciação ou **INTEGRAÇÃO**, assim se

$$\frac{d}{dx}[F(x)] = f(x)$$

para enfatizar esse processo de integração, reescrevemos usando a notação de integral: $\int f(x)\,dx = F(x) + C$

onde C deve ser interpretada como uma constante arbitrária.

Anti-diferencial ou Integral

Observações:

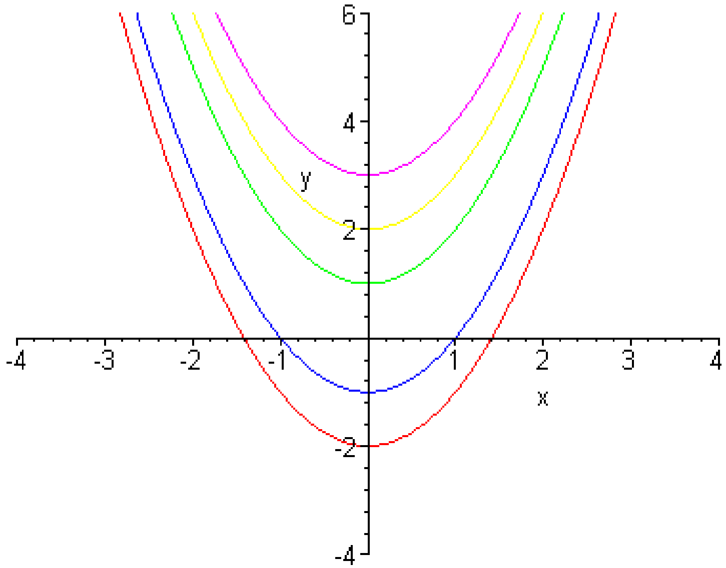
- A expressão $\int f(x)\,dx$ é denominada integral indefinida.
- Indefinida por que o resultado da antidiferenciação é uma função "genérica".
- O sinal de *f* é o sinal da integral.

Anti-diferencial ou Integral

Observações:

❖ A constante C é uma constante de integração, $y = \int 2x \; dx = x^2$

conforme o gráfico abaixo.



Engenharia Civil

Anti-diferencial ou Integral

TEOREMAS DE INTEGRAÇÃO

1. $\int x^n \, dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$

Exemplos:

a) $\int x^2 dx =$

b) $\int x^3 dx =$

c) $\int \dfrac{dx}{x^3} =$

d) $\int \sqrt{x} dx =$

e) $\int x^5 dx =$

Engenharia Civil

Anti-diferencial ou Integral

TEOREMAS DE INTEGRAÇÃO

2. $\int a\,f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$

Exemplos:

a) $\int 3x^2 dx =$

b) $\int -x^3 dx =$

c) $\int \frac{5}{x^2} dx =$

d) $\int 2\sqrt[3]{x}\,dx =$

Engenharia Civil

Anti-diferencial ou Integral

TEOREMAS DE INTEGRAÇÃO

3. $\int dx = x + c$

Exemplos:

a) $\int 3 \ dx =$

b) $\int \frac{1}{2} dx =$

c) $\int -5dx =$

Engenharia Civil

Anti-diferencial ou Integral

TEOREMAS DE INTEGRAÇÃO

4. $\int [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$

Exemplos:

a) $\int (3x+4)^2 dx =$

b) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx =$

c) $\int \frac{x^3 + 5x^2 - 4}{x^2} dx =$

d) $\int \sqrt{x}(x+2)dx =$

Engenharia Civil

Anti-diferencial ou Integral

Integração por substituição de variável

$$\boxed{\int f(g(x))[g'(x)]dx = G(g(x)) + c}$$

Exemplo: calcular $\int 2x\sqrt{x^2+3}\,dx$

Engenharia Civil

Anti-diferencial ou Integral

Exemplos:

a) $\int (2x+1)^2 dx$

b) $\int 2x(3x^2-2)^3 dx$

c) $\int \frac{xdx}{\sqrt{2x^2+3}}$

d) $\int 2(1+2x)^4 dx$

e) $\int 10x\sqrt{5x^2-4}\ dx$

f) $\int (x-1)^4 dx$

g) $\int \frac{x+1}{(x^2+2x-3)^2} dx$

h) $\int \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+3}} dx$

Anti-diferencial ou Integral

Integral da Função Exponencial

$$\int e^{u} du = e^{u} + c \qquad \int e^{-u} du = -e^{-u} + c \qquad \int a^{u} du = \frac{a^{u}}{\ln a} + c$$

Exemplo: $\int 5^{3x} dx$

Engenharia Civil

Anti-diferencial ou Integral

Exemplos:

a) $\int 2e^{x}dx$

b) $\int e^{5x}dx$

c) $\int e^{-2x}dx$

d) $\int e^{2-5x}dx$

e) $\int (e^{3x}+x)dx$

f) $\int \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}dx$

g) $\int xe^{x^2}dx$

h) $\int xe^{5x^2}dx$

Anti-diferencial ou Integral

Integral da Função logarítmica

$$\boxed{\int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + c}$$

Exemplo: $\displaystyle\int \frac{dx}{3-2x}$

Engenharia Civil

Anti-diferencial ou Integral

Exemplos:

a) $\int \frac{dx}{x}$

b) $\int \frac{4}{x} dx$

c) $\int \frac{4x dx}{x^2+1}$

d) $\int \frac{3}{3x+1} dx$

e) $\int \frac{4x^3 dx}{(2+x^4)}$

Anti-diferencial ou Integral

Integral das Funções Trigonométricas

- $\int \cos(u)du = \text{sen}(u) + C$
- $\int \text{sen}(u)du = -\cos(u) + C$
- $\int \sec^2(u)du = \text{tg}(u) + C$
- $\int \sec(u).\text{tg}(u)du = \sec(u) + C$
- $\int \cos\sec^2(u)du = -\cot g(u) + C$
- $\int \cos\sec(u).\cot g(u)du = -\cos\sec(u) + C$
- $\int \text{tg}(u)du = \text{In}|\sec(u)| + C = -\text{In}|\cos(u)| + C$
- $\int \cot g(u)du = \text{In}|\text{sen}(u)| + C$
- $\int \sec(u)du = \text{In}|\sec(u) + \text{tg}(u)| + C$
- $\int \cos\sec(u)du = \text{In}|\cos\sec(u) - \cot g(u)| + C$

Anti-diferencial ou Integral

Integral das Funções Trigonométricas

Exemplos:

1) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$

2) $\int tg(3x)dx$

3) $\int \frac{dx}{\cos^2(2x)}$

Engenharia Civil

Anti-diferencial ou Integral

Exemplos:

a) $\int 2\cos(x)dx$

b) $\int 3x^2 sen(x^3)dx$

c) $\int sen(2x)dx$

d) $\int x\cos(x^2)dx$

e) $\int tg(3x)dx$

f) $\int sec^2\left(\frac{x}{2}\right)dx$

g) $\int sec(3x)tg(3x)dx$