Engenharia Civil

Integrais

Engenharia Civil

Ementa

INTEGRAL INDEFINIDA

- ~~Conceito e propriedades da integral indefinida;~~
- ~~Técnicas de integração: substituição~~ **e partes;**
- **Integração por substituição trigonométrica;**
- **Integração de funções racionais por frações parciais;**

Ementa

INTEGRAL DEFINIDA

- Conceito e propriedades da integral definida;
- Teorema fundamental do cálculo;
- Cálculo de áreas, comprimento de arcos, volumes e volumes de revolução;
- Integrais impróprias;
- Integrais múltiplas;

Integração por Partes

O processo de *integração por partes* é indicado quando o integrando possui um produto do tipo:

- **função potência x função logarítmica;**
- **função potência x função trigonométrica;**
- **função potência x função exponencial.**

E todas as outras decorrentes da combinação entre estas funções.

Integração por Partes

Tomando como ponto de partida a ***Derivação*** pela ***Regra do Produto*** temos:

$$\frac{d}{dx}(uv) = u'v + uv' \qquad \text{(Regra do Produto)}$$

$$\int\left[\frac{d}{dx}(uv)\right] = \int u'v\,dx + \int uv'\,dx \qquad \text{(Integrando ambos os lados)}$$

$$uv = \int v\,\underline{u'dx} + \int u\,\underline{v'dx} \qquad \text{(Reescrevendo a expressão)}$$

$$uv = \int v\,du + \int u\,dv \qquad \text{(Escrevendo na forma diferencial)}$$

Integração por Partes com **u** e **v** *funções diferenciáveis* de **x.**

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

Engenharia Civil

Integração por Partes

A ***integral por partes*** pode ser aplicada *sucessivas vezes* para um mesmo exercício. Quando um dos fatores, for potência procura-se diminuir o expoente desta potência.

Dica: Ao aplicarmos esta técnica devemos separar o **integrando** em **duas** partes, ***u*** *e* ***dv***, levando em conta duas situações:

1º- A parte escolhida como **dv** deve ser facilmente integrável;

2º - $\boxed{\int v\,du}$ deve ser mais simples do que $\int u\,dv$;

Integração por Partes

Exemplo:

1) $\int x e^x dx$

2) $\int x \operatorname{sen}(2x) dx$

3) $\int e^x \operatorname{sen}(x) dx$

4) $\int x \ln(x) dx$

5) $\int x^2 e^{-x} dx$

6) $\int e^x . \cos(x) dx$

Engenharia Civil

Integrais envolvendo potências de funções trigonométricas

SENO E COSSENO

Caso 1. $\int \text{sen}^n u\,du$ ou $\int \cos^n u\,du$ onde n é um número inteiro ímpar

Usamos $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, então $\text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$, $\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$

Exemplo : $\int \cos^3 x\,dx$

Integrais envolvendo potências de funções trigonométricas

SENO E COSSENO

Caso 2. $\int \operatorname{sen}^n u\,du$ ou $\int \cos^n u\,du$ onde n é um número par

Usamos:

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Exemplo: $\int \operatorname{sen}^2 x\,dx$

Engenharia Civil

Integrais envolvendo potências de funções trigonométricas

SENO E COSSENO

Caso 3. $\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x\, dx$ onde pelo menos um dos expoente é ímpar (abre-se o expoente ímpar e substitui-se).

Usamos $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, então $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$, $\quad \cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$.

Exemplo: $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^4 x\, dx$

Integrais envolvendo potências de funções trigonométricas

SENO E COSSENO

Caso 4. $\int \text{sen}^n x \cos^m x \, dx$ onde m e n são pares

Usamos:

$$\text{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Exemplo: $\int \text{sen}^2 x \cos^2 x \, dx$

Engenharia Civil

Integração por substituição trigonométrica

Até agora resolvemos integrais envolvendo potências e produtos de funções trigonométricas. Surgem integrais que envolvem expressões tais como: $\boxed{\sqrt{a^2 - b^2u^2}\ ,\ \sqrt{a^2 + b^2u^2}\ \text{ e }\ \sqrt{b^2u^2 - a^2}}$.

É possível resolver estas integrais fazendo uma **substituição trigonométrica**, que resulta em uma integral de funções trigonométricas.

Integração por substituição trigonométrica

Podemos expressá-las sem os radicais, utilizando a chamada **Substituição Trigonométrica**, conforme a tabela:

Caso	Radical	Subs. Trigonométrica	Transformada	Trigonometria no Triângulo Retângulo
I	$\sqrt{a^2 - b^2u^2}$	$u = \left(\frac{a}{b}\right)\text{sen}(\theta)$	$a.\sqrt{1 - \text{sen}^2(\theta)} = a.\cos(\theta)$	$\text{tg}\theta = \frac{CO}{CA}$
II	$\sqrt{a^2 + b^2u^2}$	$u = \left(\frac{a}{b}\right)\text{tg}(\theta)$	$a.\sqrt{1 + \text{tg}^2(\theta)} = a.\sec(\theta)$	$\cos\theta = \frac{CA}{HI}$
III	$\sqrt{b^2u^2 - a^2}$	$u = \left(\frac{a}{b}\right)\sec(\theta)$	$a.\sqrt{\sec^2(\theta) - 1} = a.\text{tg}(\theta)$	$\text{sen}\theta = \frac{CO}{HI}$

Integração por substituição trigonométrica

Demonstraremos o desenvolvimento do radical $\sqrt{a^2 - b^2u^2}$, os demais casos são análogos.

$$\sqrt{a^2 - b^2u^2} = \sqrt{a^2 - b^2\left(\frac{a}{b}\operatorname{sen}(\theta)\right)^2} = \sqrt{a^2 - b^2.\frac{a^2}{b^2}\operatorname{sen}^2(\theta)} = \sqrt{a^2 - a^2\operatorname{sen}^2(\theta)} = \sqrt{a^2.(1 - \operatorname{sen}^2(\theta))} =$$

$$= a.\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\theta)} = a\sqrt{\cos^2(\theta)} = a\cos(\theta)$$

Integração por substituição trigonométrica

Observação: Verifique que a variável final é θ.

A expressão correspondente, na variável original (x), é obtida através das relações do *triângulo retângulo*.

Engenharia Civil

INSTITUTO FEDERAL
SUL-RIO-GRANDENSE
Campus Passo Fundo

Integração por substituição trigonométrica

RESUMINDO

$$\sqrt{a^2 - u^2} = a.\cos(\theta)$$

$$u = a.\mathrm{sen}(\theta)$$

$$du = a.\cos(\theta)d\theta$$

$$\sqrt{a^2 + u^2} = a.\sec(\theta)$$

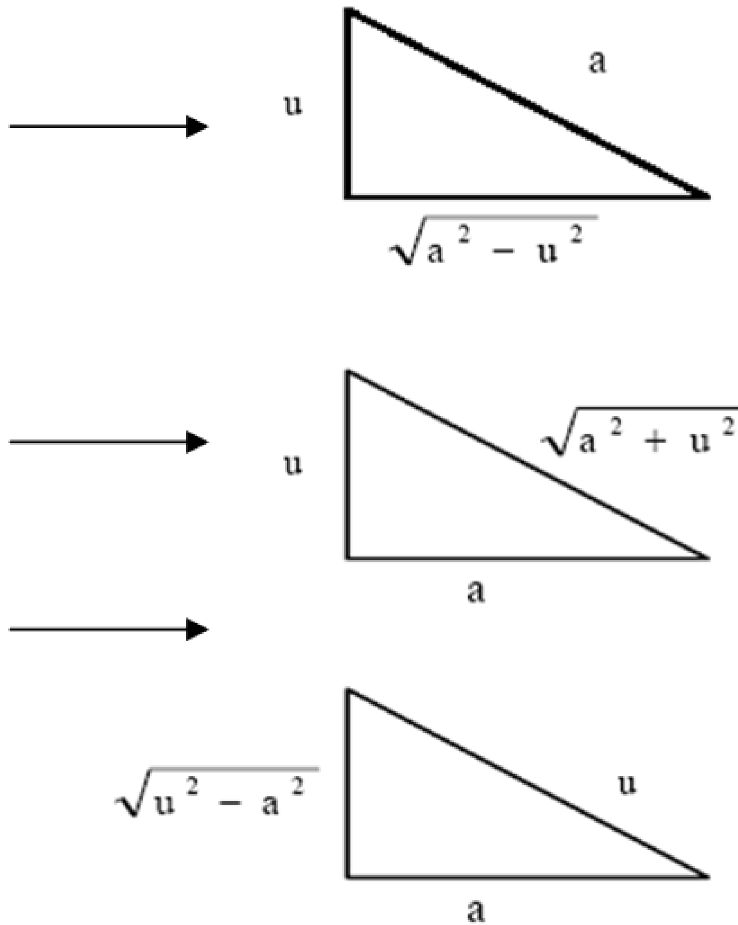
$$u = a.\mathrm{tg}(\theta)$$

$$du = a.\sec^2(\theta)d\theta$$

$$\sqrt{u^2 - a^2} = a.\mathrm{tg}(\theta)$$

$$u = a.\sec(\theta)$$

$$du = a.\sec(\theta).\mathrm{tg}(\theta)d\theta$$



Integração por substituição trigonométrica

Exemplos:

1) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+9}}$

2) $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,dx$

3) $\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\,dx$

4) $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\,dx$

Integração de funções racionais

Uma função racional f(x) é definida como o quociente de duas funções polinomiais, ou seja, $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ onde p(x) e q(x) são polinômios.

As integrais de algumas funções racionais simples, como por exemplo: $\frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^2+1}, \frac{2x}{x^2+1}$ são imediatas ou podem ser resolvidas por substituição, conforme vistas anteriormente.

Integração de funções racionais

Proposição: Se p(x) é um polinômio com coeficientes reais, p(x) pode ser expresso como um produto de fatores lineares e/ou quadráticos, todos com coeficientes reais.

Por exemplo, o polinômio $q(x) = x^2 - 3x + 2$ pode ser escrito como um produto de fatores lineares, ou seja, $q(x) = (x-2)(x-1)$.

Integração de funções racionais

Estamos interessados na integração de expressões da forma $\boxed{\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx}$ onde o grau de p(x) é menor que o grau de q(x).

Caso isso não ocorra, devemos primeiro efetuar a divisão de p(x) por q(x).

Integração de funções racionais

Caso 1 Os fatores de q(x) são lineares e distintos, isto é, não se repetem. Neste caso podemos escrever $q(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$, onde a_i = 1 , ... , n, são distintos dois a dois.

Integração de funções racionais

A decomposição da função racional $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ em frações mais simples é dada por:

$$\boxed{f(x)=\frac{A_1}{(x-a_1)}+\frac{A_2}{(x-a_2)}+\cdots+\frac{A_n}{(x-a_n)}}$$

onde A_1, A_2, ..., A_n são constantes que devem ser determinadas.

Exemplo: $\displaystyle\int\frac{1}{(x-1)(x+2)}dx$

Integração de funções racionais

Caso 2 Os fatores Q(x) são todos lineares e alguns se repetem.

Se algum fator linear $(x - a_i)$ de q(x) tem multiplicidade r, a esse fator corresponderá uma soma de frações parciais da forma:

$$\boxed{\frac{B_1}{(x-a_i)^r}+\frac{B_2}{(x-a_i)^{r-1}}+\cdots+\frac{B_r}{(x-a_i)}}$$

, onde $B_1, B_2, ..., B_r$ são constantes que devem ser determinadas.

Exemplo: $\displaystyle\int \frac{x^3-1}{(x^2)(x-2)^3}dx$