INSTITUTO FEDERAL
SUL-RIO-GRANDENSE
Campus Passo Fundo

Engenharia Civil

Integrais

Engenharia Civil

Ementa

INTEGRAL INDEFINIDA

- ~~Conceito e propriedades da integral indefinida;~~
- ~~Técnicas de integração: substituição~~ **e partes;**
- ~~Integração por substituição trigonométrica;~~
- ~~Integração de funções racionais por frações parciais;~~

Engenharia Civil

Ementa

INTEGRAL DEFINIDA

- ~~Conceito e propriedades da integral definida;~~
- ~~Teorema fundamental do cálculo;~~
- ~~Cálculo de áreas~~**, comprimento de arcos, volumes e volumes de revolução;**
- Integrais impróprias;
- Integrais múltiplas;

Engenharia Civil

Aplicações de integrais

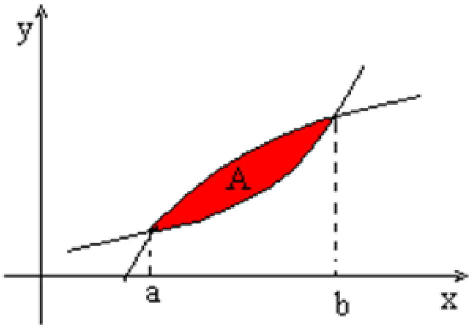
Área de região entre curvas

C) Sejam f e g duas funções contínuas em [a, b], tal que $f(x) \geq g(x)$, $\forall\, x \in [a, b]$ então a área da região limitada pelas curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ e as retas $x = a$ e $x = b$ é dada por:

$$\boxed{A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx}$$

independente de f e g serem positivas ou não.

De fato, temos três possibilidades:



Engenharia Civil

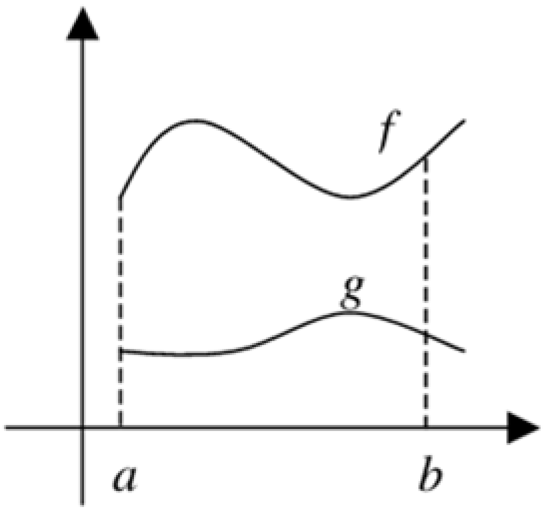
Aplicações de integrais

Área de região entre curvas

C) 1º caso: $f(x) \geq 0,\; g(x) \geq 0 \;\; e \;\; f(x) \geq g(x),\; \forall x \in [a,b]$

Neste caso, $A = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)\,dx =$

$$\boxed{\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx}$$



Engenharia Civil

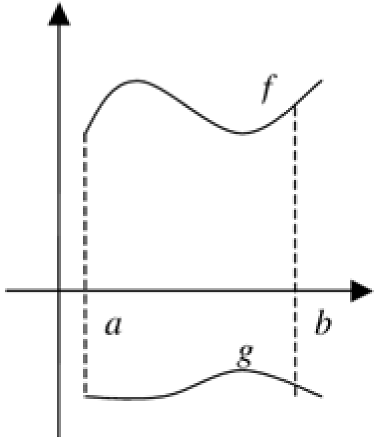
Aplicações de integrais

Área de região entre curvas

C) 2º caso: $f(x) \geq 0, \ e \ g(x) \leq 0 \quad \forall x \in [a,b]$

Neste caso, $A = \int_a^b f(x)dx + \left[-\int_a^b g(x)\,dx \right] = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx =$

$$\boxed{\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx}$$



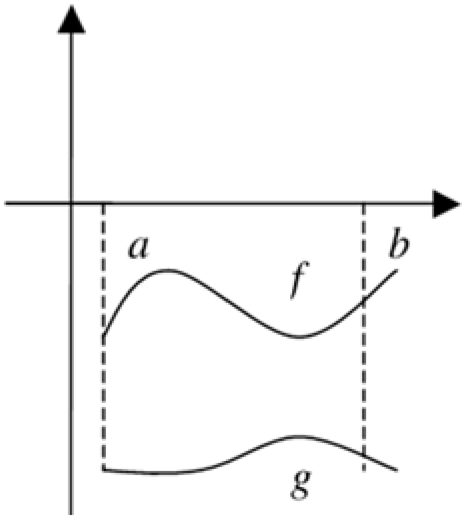
Aplicações de integrais

Área de região entre curvas

C) 3º caso: $f(x) \leq 0, \; g(x) \leq 0 \;\; e \;\; f(x) \geq g(x), \; \forall x \in [a,b]$

Neste caso, $A = -\int_a^b [g(x)dx - \left[-\int_a^b f(x)] \, dx \right] =$

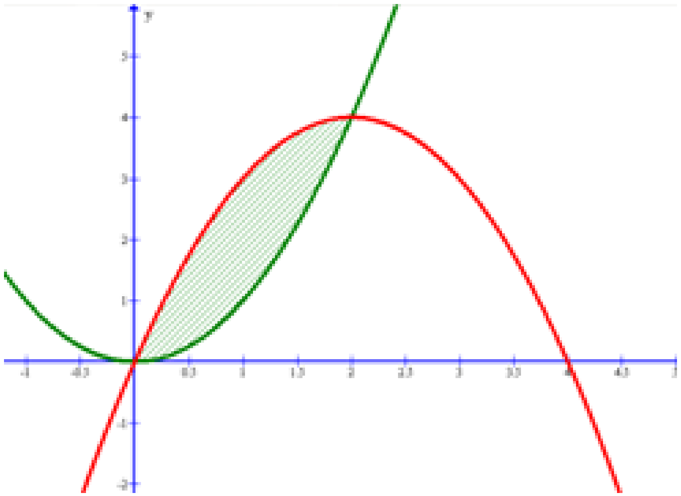
$$\boxed{\int_a^b [f(x) - g(x)] \, dx}$$



Aplicações de integrais

Exemplos:

1) Determinar a área formada entre as funções $y = x^2$ e $y = -x^2 + 4x$.

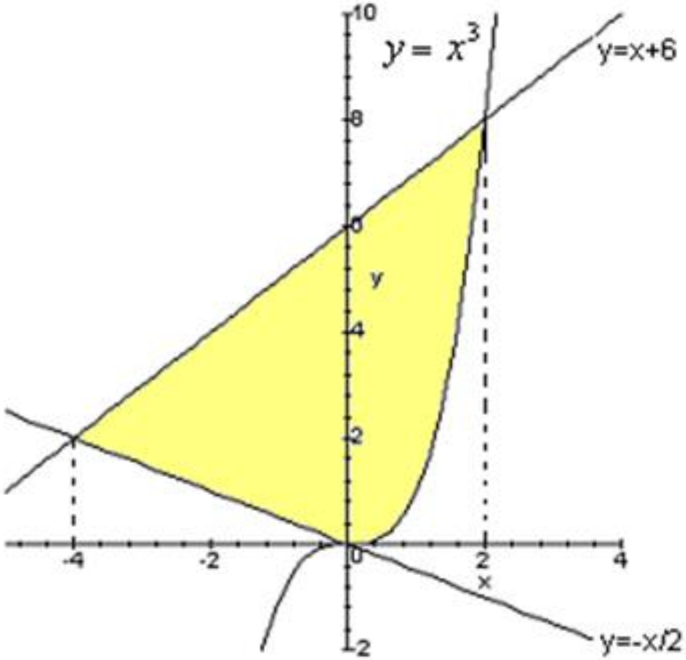


Engenharia Civil

Aplicações de integrais

Exemplos:

2) Calcule a área limitada pelas funções:



Aplicações de integrais

Exemplos:

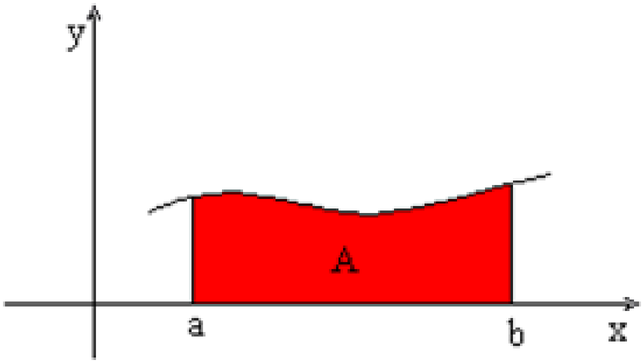
3) Encontre a área da região limitada o pelas curvas $y = x^2 - 1$ e $y = x + 1$

Engenharia Civil

Volume de um Sólido de Revolução

Método do Disco Circular

Seja y = f(x) uma função contínua e positiva em [a, b].



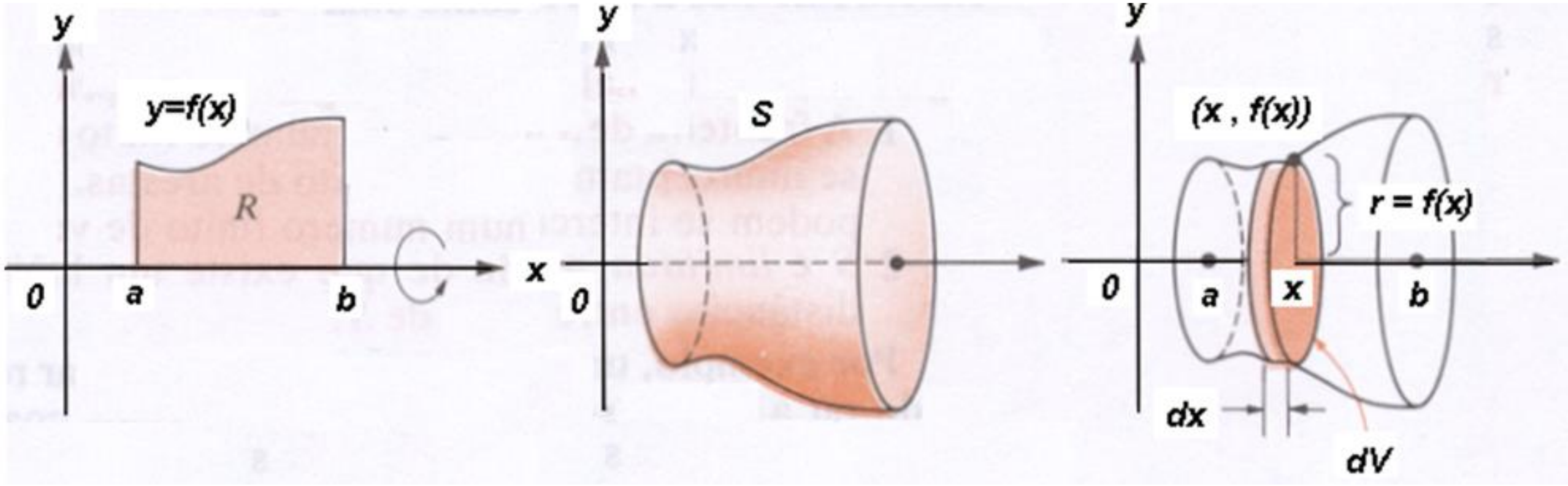
A função y = f(x), as retas x = a, x = b e y = 0 define uma área A. Girando a área A em torno do eixo x definimos um sólido de revolução, semelhante a um cilindro (cilindróide).

Engenharia Civil

Volume de um Sólido de Revolução

O volume desse sólido pode ser calculado por integração da seguinte maneira:

Definimos a medida do volume de um cilindro circular reto como $V = \pi r^2 h$.



Volume de um Sólido de Revolução

$\Delta_i V = \pi \cdot [f(\varepsilon_i)]^2 \cdot \Delta_i x$ como existem n retângulos, são obtidos n discos circulares e é dada por: $\sum_{i=1}^{n} \Delta_i V = \sum_{i=1}^{n} \pi \cdot [f(\varepsilon_i)]^2 \Delta_i x$

Quanto menor o Δx da partição, maior será o número de retângulos (n) e teremos a melhor aproximação possível do volume.

$$V \cong \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi \cdot (f(x))^2 \Delta x$$

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx \quad \text{em torno do eixo x.}$$

Volume de um Sólido de Revolução

Definição: Seja f uma função contínua no intervalo [a, b] e admitamos $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$. Se S for o sólido de revolução obtido pela rotação em torno do "eixo x", da região limitada pela curva $y = f(x)$, o eixo x e as retas $x = a$ e $x = b$, então:

$$\boxed{V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx}$$

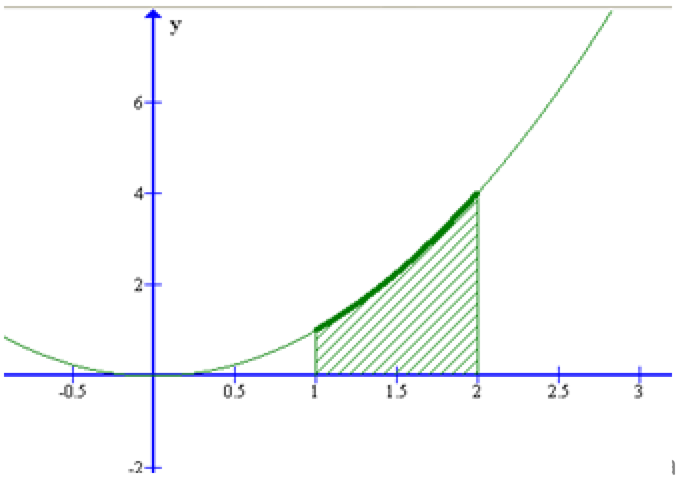
Engenharia Civil

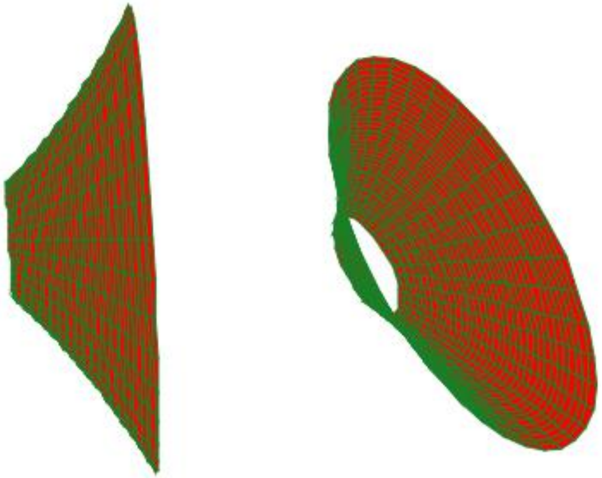
Volume de um Sólido de Revolução

Exemplo: Calcular o volume da região limitada pela curva

$y = x^2$, o eixo x e as retas x = 1 e x = 2 sendo a rotação em torno

do eixo x.





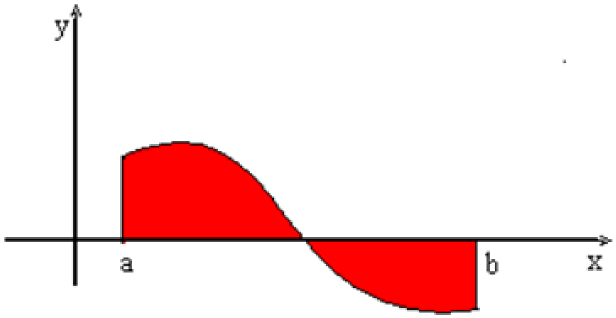
Volume de um Sólido de Revolução

A função f(x) é negativa em alguns pontos de [a, b]

A figura abaixo mostra a região quando gerado pela rotação, ao redor do eixo dos x, da região sob o gráfico da função $|f(x)|$ de a até b, forma um sólido de revolução. Como $|f(x)|^2 = (f(x))^2$, a fórmula

$$\boxed{V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx}$$

permanece válida neste caso.



Volume de um Sólido de Revolução

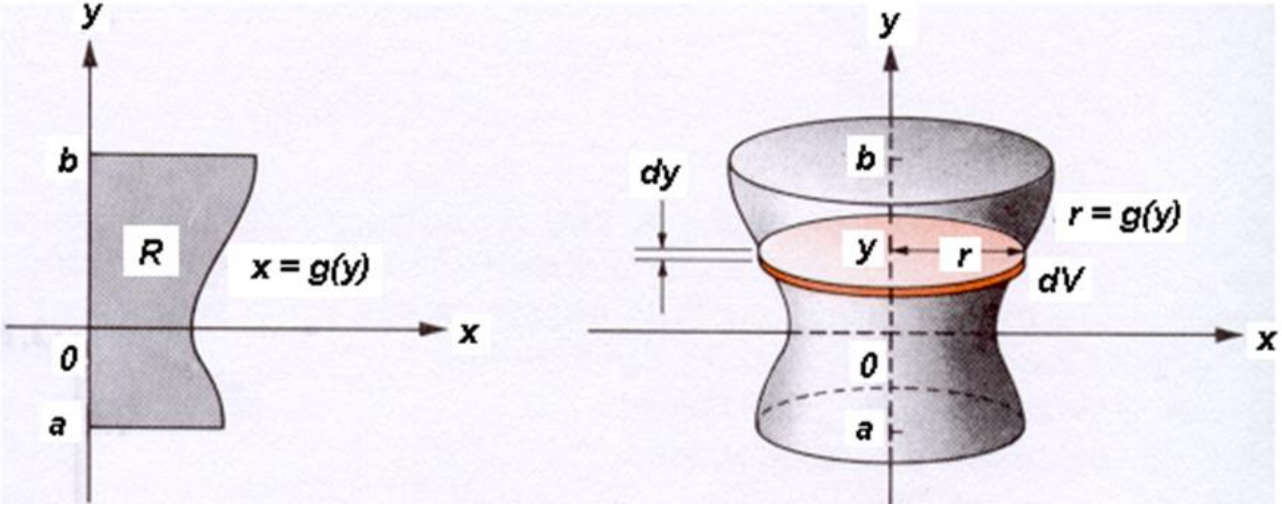
Ao invés de girar ao redor do eixo dos x, a região gira em torno do eixo dos y e é limitada pelo eixo y

Obviamente, uma região plana pode ser girada em torno do eixo y ao invés do eixo x, e, novamente, um sólido de revolução será gerado. Por exemplo, suponhamos que R seja uma região plana limitada pelo eixo y, pelas linhas horizontais $y = a$ e $y = b$, onde $a < b$, e pelo gráfico de $x = f(y)$. O sólido de revolução gerado pela revolução de R em torno de y é dado por:

Volume de um Sólido de Revolução

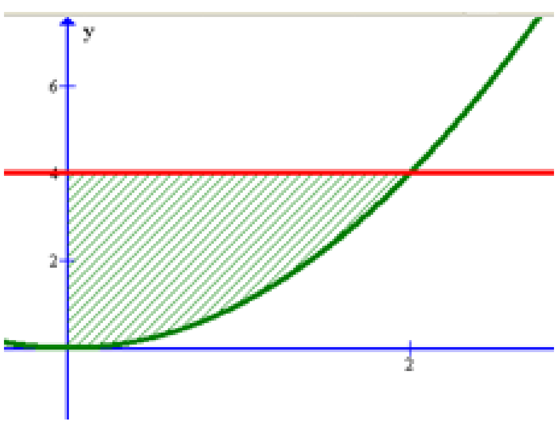
Ao invés de girar ao redor do eixo dos x, a região gira em torno do eixo dos y e é limitada pelo eixo y

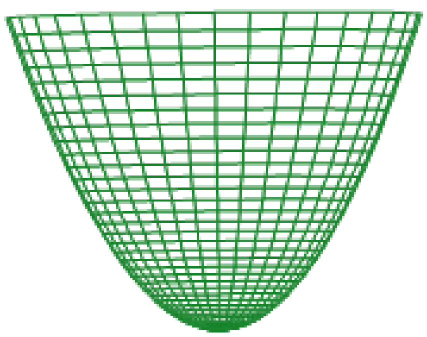
$$\boxed{V = \pi \int_a^b (f(y))^2 \, dy}$$



Volume de um Sólido de Revolução

Exemplo: Calcule o volume do sólido gerado pela revolução da região R, pelo eixo y, pela linha y=4 e pelo gráfico de $y = x^2$ para $x \geq 0$, em torno do eixo y.





Volume de um Sólido de Revolução

A região está entre o gráfico de duas funções f(x) e g(x) de a até b (Método dos anéis circulares)

Sejam f e g contínuas no intervalo [a, b] a admitamos que $f(x) \geq g(x) \geq 0 \ \forall \ x \in [a, b]$. Se S for o sólido de revolução gerado pela rotação em torno do eixo x da região limitada pelas curvas $y = f(x)$ e $y= g(x)$ e as retas $x = a$ e $x = b$:

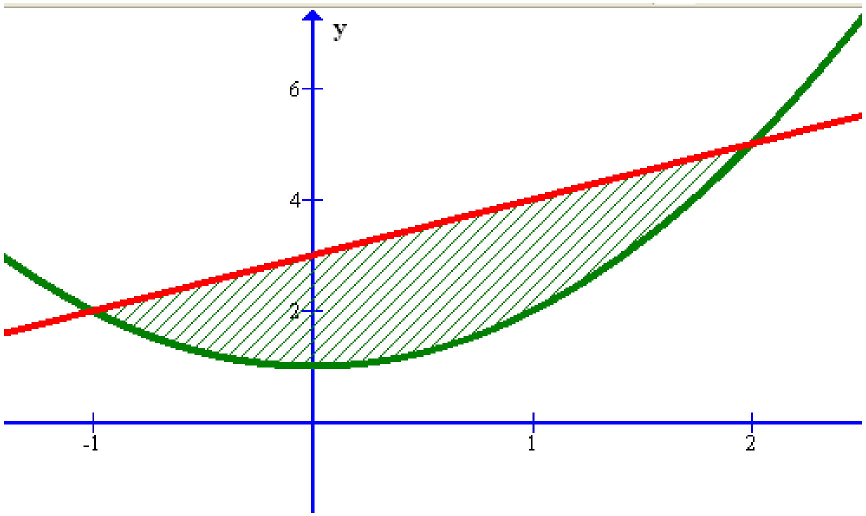
$$\boxed{V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 - [g(x)]^2 \, dx}$$

Engenharia Civil

Volume de um Sólido de Revolução

Exemplo:

Encontre o volume do sólido gerado pela rotação em torno do eixo x da região limitada por $y = x^2 + 1$ e $y = x + 3$.



Volume de um Sólido de Revolução

Naturalmente, o método dos anéis circulares é aplicável aos sólidos gerados pela revolução de regiões planas R em torno do eixo y, ao invés do eixo x.

$$\boxed{V = \pi \int_a^b [f(y)]^2 - [g(y)]^2 \, dy}$$

INSTITUTO FEDERAL
SUL-RIO-GRANDENSE
Campus Passo Fundo

Engenharia Civil

Volume de um Sólido de Revolução

Volume correspondente a rotação em, torno do eixo x, de uma região limitada pelo eixo x e não adjacente ao eixo de rotação

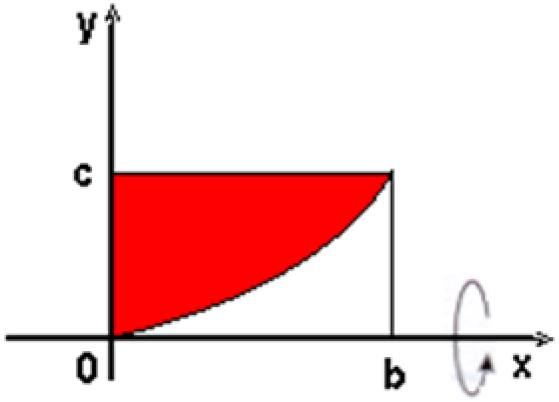
$$V = \pi \int_{0}^{b} [c^2 - (f(x))^2]\,dx$$

ou

$$V = \pi c^2 (b - 0) - \pi \int_{00}^{b} [f(x)]^2\,dx$$

ou

$$V = \pi c^2 b - \pi \int_{0}^{b} [f(x)]^2\,dx$$

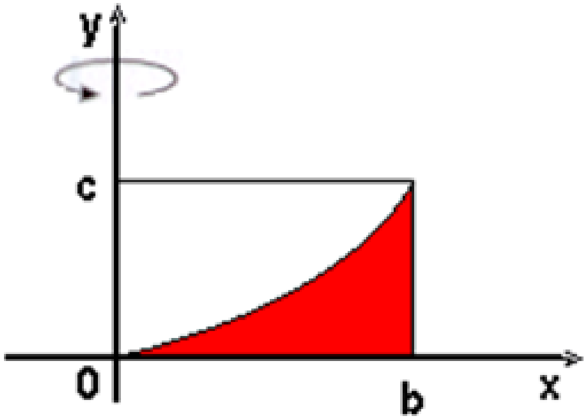


Engenharia Civil

Volume de um Sólido de Revolução

Volume correspondente a rotação em, torno do eixo y, de uma região limitada pelo eixo x e não adjacente ao eixo de rotação

$$V = \pi b^2 c - \pi \int_0^c [f(y)]^2 \, dy$$



Volume de um Sólido de Revolução

A rotação se efetua ao redor de uma reta paralela a um dos eixos coordenados

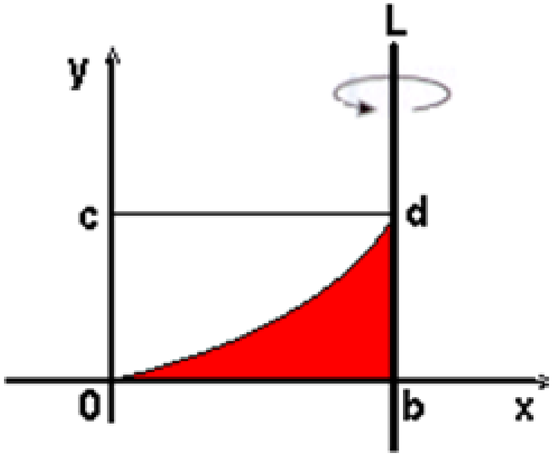
O método dos anéis circulares é também efetivo para sólidos gerados pela revolução de regiões planas em torno de eixos diferentes dos eixos x e y.

Engenharia Civil

Volume de um Sólido de Revolução

a) Região adjacente a reta x = L e girada em torno de L

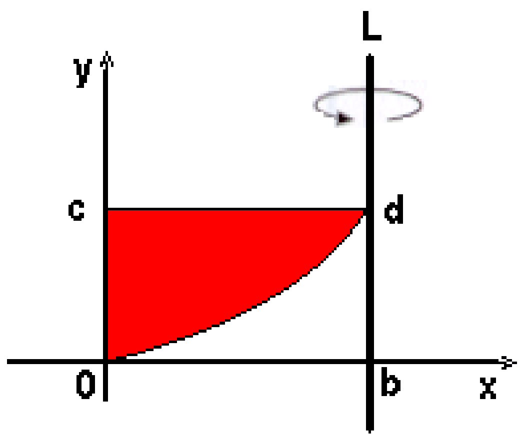
$$V = \pi \int_0^c [L - f(y)]^2 \, dy$$



Volume de um Sólido de Revolução

b) Região não adjacente a reta x =L e girada em torno de

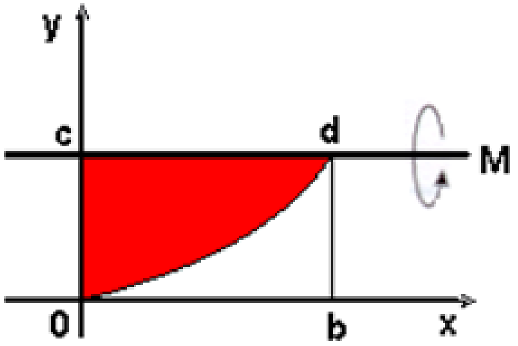
$$V = \pi b^2 c - \pi \int_0^c [L - f(y)]^2 \, dy$$



Volume de um Sólido de Revolução

c) Região adjacente a reta y = M e girada em torno de M

$$V = \pi \int_0^b [M - f(x)]^2 \, dx$$

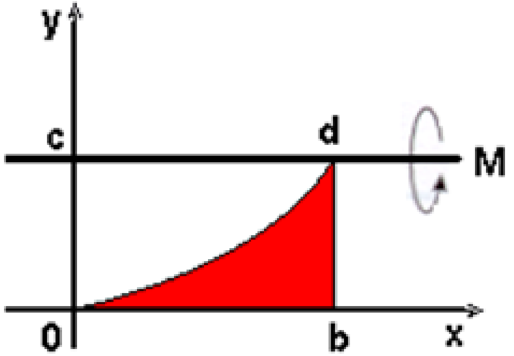


Engenharia Civil

Volume de um Sólido de Revolução

d) Região não adjacente a reta y = M e girada em torno de M

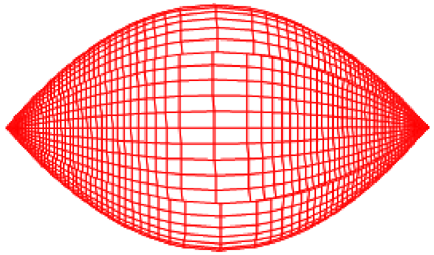
$$V = \pi c^2 b - \pi \int_0^b [M - f(x)]^2 \, dx$$

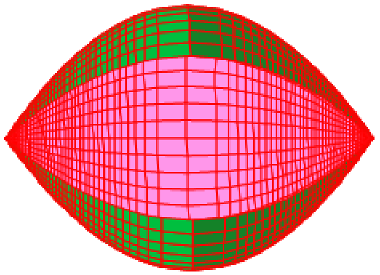


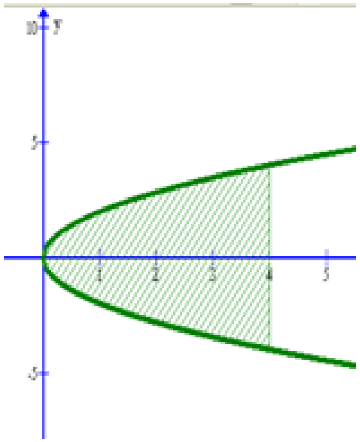
Volume de um Sólido de Revolução

Exemplos:

1) Determine o volume do sólido obtido pela revolução da região R em torno da linha x = 4, onde R é limitada pelos gráficos de $y^2 = 4x$ e $x = 4$.





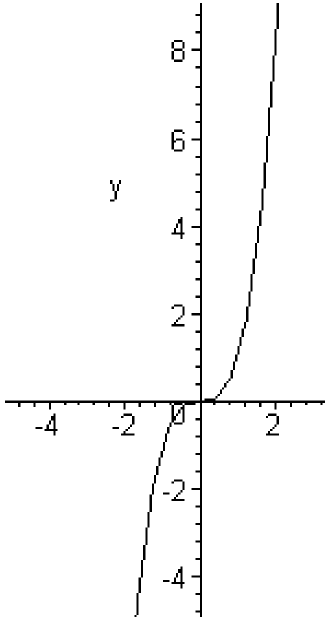


Volume de um Sólido de Revolução

Exemplos:

2) A região delimitada pelo eixo-y, pelos gráficos de $y = x^3$, $y = 1$ e $y = 8$ gira em torno do eixo y.

Determine o volume do sólido resultante.



Engenharia Civil

Volume de um Sólido de Revolução

Exemplos:

2) Na figura, a curva OP tem a equação $y = x^3$. Determine o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da região:

a) OBP em torno da linha $y = 8$.

b) OAP em torno da linha $x = 2$.

c) OAP em torno da linha $y = 8$.