INSTITUTO FEDERAL
SUL-RIO-GRANDENSE
Campus Passo Fundo

Engenharia Civil

Integrais

Engenharia Civil

Ementa

INTEGRAL INDEFINIDA

- ~~Conceito e propriedades da integral indefinida;~~
- ~~Técnicas de integração: substituição~~ **e partes;**
- ~~Integração por substituição trigonométrica;~~
- ~~Integração de funções racionais por frações parciais;~~

Engenharia Civil

Ementa

INTEGRAL DEFINIDA

- ~~Conceito e propriedades da integral definida;~~
- ~~Teorema fundamental do cálculo;~~
- ~~Cálculo de áreas~~**, comprimento de arcos, volumes e volumes de revolução;**
- **Integrais impróprias;**
- **Integrais múltiplas;**

Engenharia Civil

Integrais Impróprias

Uma integral imprópria é a integral que possui um ou ambos os limites de integração infinitos. Segue as Definições:

Definição 1:

Se *f* é uma função integrável em [a, +∞) então:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

Engenharia Civil

Integrais Impróprias

Definição 2:

Se *f* é uma função integrável em (-∞,b] então:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

Definição 3:

Se *f* é uma função integrável em (- ∞, +∞) , então:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{0} f(x)\,dx + \lim_{b \to +\infty} \int_{0}^{b} f(x)\,dx$$

Integrais Impróprias

Se nas definições anteriores os limites existirem, as integrais impróprias são ditas **convergentes**; caso contrário, são ditas **divergentes**.

Exemplo: Estude as convergências das seguintes integrais impróprias.

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{2} \frac{1}{(4-x^2)}\,dx$

b) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-x}\,dx$

Integrais Múltiplas

A noção de integral definida pode ser estendida para funções de duas ou mais variáveis. Sabemos que a integral definida de uma função de uma variável

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

originou-se do problema da determinação de áreas sob curvas. As integrais das funções de duas variáveis originam-se do problema da determinação de volumes sob superfícies.

Integrais Múltiplas

Dada uma função *f* de duas variáveis, contínua e não-negativa numa região *R* do plano *xy*, achar o volume do sólido compreendido entre a superfície z = f(x,y) e a região R.

O procedimento para calcular o volume consiste em subdividir a região *R* em *n* retângulos e para cada ponto arbitrário (x_i, y_i) de cada retângulo, obter a altura $f(x_i, y_i)$.

Engenharia Civil

Integrais Múltiplas

Com isso é possível calcular o volume de um paralelepípedo com área da base ΔA_i e altura $f(x_i,y_i)$ como o produto $\Delta A_i \cdot f(x_i,y_i)$, de modo que o somatório

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i).\Delta A_i$$

pode ser considerado como uma aproximação do volume V do sólido inteiro.

Integrais Múltiplas

1. Cálculo de Integrais Duplas e Integrais Iteradas

Seja um sólido S de volume V, limitado na base pelo plano $z = 0$, nas laterais pelos planos $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$ e na parte superior pela função $z = f(x,y)$, conforme figura.

Engenharia Civil

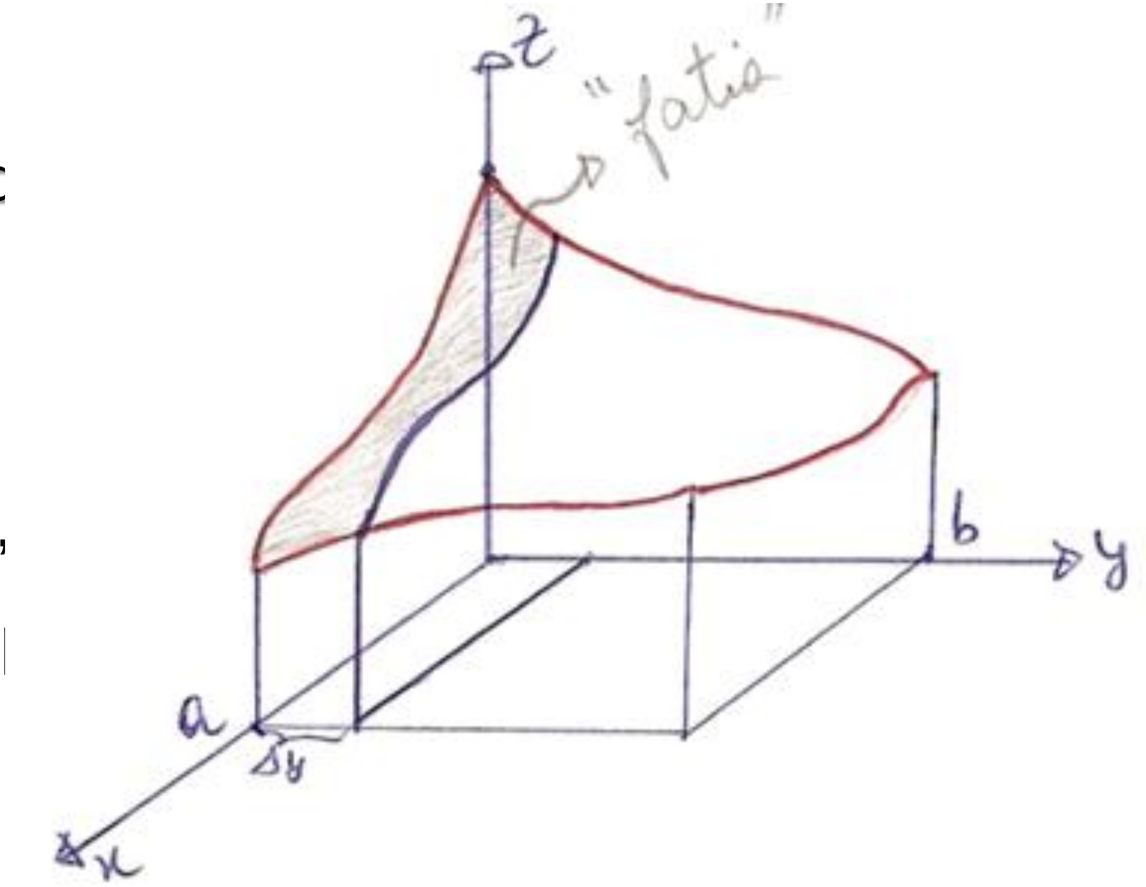
Integrais Múltiplas

1. Cálculo c

Seja se pelo

plano z = 0, = 0, y = b e

na parte su jura.



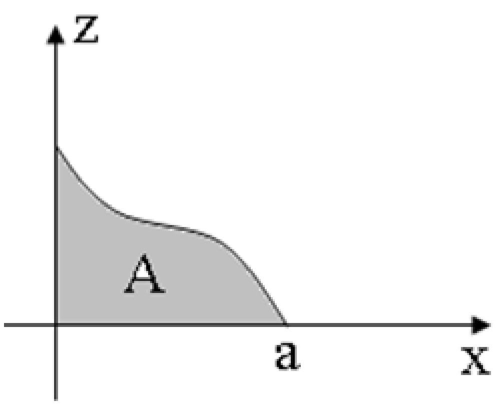
Engenharia Civil

Integrais Múltiplas

1. Cálculo de Integrais Duplas e Integrais Iteradas

O volume V de S pode ser calculado somando as "fatias" de espessura Δy e volume .

$$V_i = \int_0^a f(x, y)dx.\Delta y$$



Integrais Múltiplas

1. Cálculo de Integrais Duplas e Integrais Iteradas

Se aumentarmos as subdivisões de modo que os comprimentos e as larguras dos retângulos da base tendam para zero, então é admissível que o volume exato seja:

$$V \cong V_1 + V_2 + \ldots + V_n$$

$$V \cong \sum_{i=1}^{n} \int_0^a f(x,y)\,dx.\Delta y$$

$$V \cong \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \int_0^a f(x,y)\,dx.\Delta y$$

Integrais Múltiplas

1. Cálculo de Integrais Duplas e Integrais Iteradas

As somas acima são chamadas somas de Riemann e o limite das somas de Riemann é denotado por:

$V = \int_0^b \int_0^a f(x, y)dxdy$ que é chamada integral dupla de *f(x,y)* em R.

Essa equação pode ser reescrita como: $V = \iint_R f(x, y)dA$

Integrais Múltiplas

1. Cálculo de Integrais Duplas e Integrais Iteradas

A integral dupla pode ser entendida como duas integrais iteradas. A solução da equação anterior é obtida resolvendo primeiramente a integral interna e depois, com este resultado, a integral externa.

Integrais Múltiplas

1. Cálculo de Integrais Duplas e Integrais Iteradas

As derivadas parciais de uma função f(x,y) são calculadas mantendo-se uma das variáveis fixa e diferenciando em relação a outra variável. Consideremos o inverso deste processo, **integração parcial**. Os símbolos:

$$\int_b^a f(x,y)dx \qquad e \qquad \int_d^c f(x,y)dy$$

Integrais Múltiplas

1. Cálculo de Integrais Duplas e Integrais Iteradas

denotam **integrais definidas parciais**; a primeira integral, chamada **integral definida parcial em relação a x**, é calculada mantendo y fixo e integrando em relação a x e a segunda integral, chamada **integral definida parcial em relação a y**, é calculada mantendo x fixo e integrando em relação a y.

Engenharia Civil

Integrais Múltiplas

1. Cálculo de Integrais Duplas e Integrais Iteradas

Exemplo:

Resolva a integral: $\int_0^1 \int_0^2 (x \cdot y)\,dx\,dy$

Engenharia Civil

Integrais Múltiplas

2. Propriedades das integrais duplas

Se f e g são funções integráveis em R e c é constante, então:

i) $\iint\limits_R [f(x,y) + g(x,y)]dA = \iint\limits_R f(x,y)dA + \iint\limits_R g(x,y)dA$

ii) $\iint\limits_R [f(x,y) - g(x,y)]dA = \iint\limits_R f(x,y)dA - \iint\limits_R g(x,y)dA$

iii) $\iint\limits_R c.f(x,y)dA = c.\iint\limits_R f(x,y)dA$

Engenharia Civil

Integrais Múltiplas

2. Propriedades das integrais duplas

Exemplos:

1) Resolva a integral: $\int_{-2}^{0}\int_{-1}^{2}(x^2+y^2)\,dx\,dy$

2) Resolva a integral: $\int_{1}^{2}\int_{0}^{3}(2y^2-3xy^2)\,dy\,dx$

Integrais Múltiplas

2. Propriedades das integrais duplas

Exemplos:

3) Resolva a integral: $\int_{\pi}^{2\pi}\int_{0}^{\pi}[sen(x)+\cos(x)]dxdy$

4) Resolva a integral: $\int_{0}^{1}\int_{0}^{1}e^{x+y}dydx$

5) Calcule o volume (aproximado) do sólido compreendido entre

x = 0, x = 2, y = 0, y = 3, z = 0 e z = x + y + 1.

Integrais Múltiplas

2. Propriedades das integrais duplas

Teorema: Seja *R* o retângulo definido pelas desigualdades:

$$a \leq x \leq b \quad \text{e} \quad c \leq y \leq d$$

Se *f(x, y)* for contínua nesse retângulo, então:

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$$

Integrais Múltiplas

2. Propriedades das integrais duplas

Exemplos:

1) Verifique se a igualdade é verdadeira: $\int_0^3 \int_1^2 x^2 y\,dy\,dx = \int_1^2 \int_0^3 x^2 y\,dx\,dy$

2) Calcule a integral dupla $\iint_R y^2 x \quad dA$ no retângulo

$$R = \{(x, y) / -3 \le x \le 2, \quad 0 \le y \le 1\}$$

Integrais Múltiplas

3. Integrais Iteradas com Limites de Integração Não-Constantes

Definição:

(a) Uma região do tipo I é limitada à esquerda e á direita por retas verticais $x = a$ e $x = b$ e é limitada abaixo e acima por curvas contínuas $y = g_1(x)$ e $y = g_2(x)$, onde $g_1(x) \leq g_2(x)$ para $a \leq x \leq b$.

Engenharia Civil

Integrais Múltiplas

3. Integrais Iteradas com Limites de Integração Não-Constantes

Definição:

Se R é uma região do tipo I, na qual f(x,y) é contínua, então:

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

Engenharia Civil

Integrais Múltiplas

3. Integrais Iteradas com Limites de Integração Não-Constantes

Definição:

(b) Uma região do tipo II é limitada abaixo e acima por retas horizontais $y = c$ e $y = d$ e é limitada à direita e à esquerda por curvas contínuas $x = h_1(y)$ e $x = h_2(y)$, que satisfazem $h_1(y) \leq h_2(y)$, para $c \leq y \leq d$.

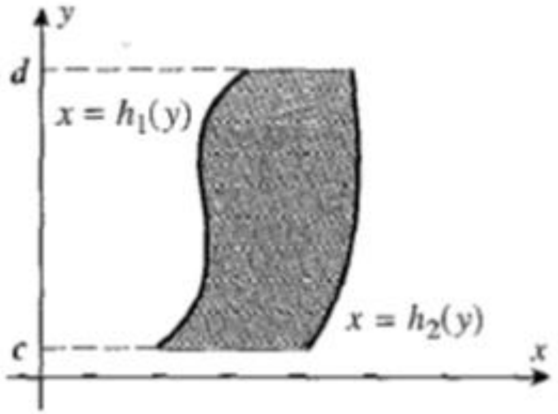
Engenharia Civil

Integrais Múltiplas

3. Integrais Iteradas com Limites de Integração Não-Constantes

Definição:

Se R é uma região do tipo II, na qual f(x,y) é contínua, então:



Região do tipo II

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

Integrais Múltiplas

Exemplo:

Calcule $\iint_D (x+2y)\,dA$, onde R é a região limitada pelas parábolas $y = 2x^2$ e $y = 1 + x^2$.

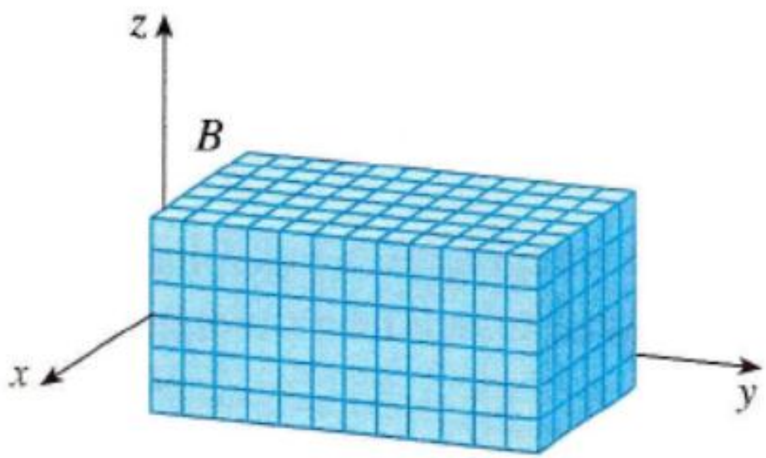
Integral tripla

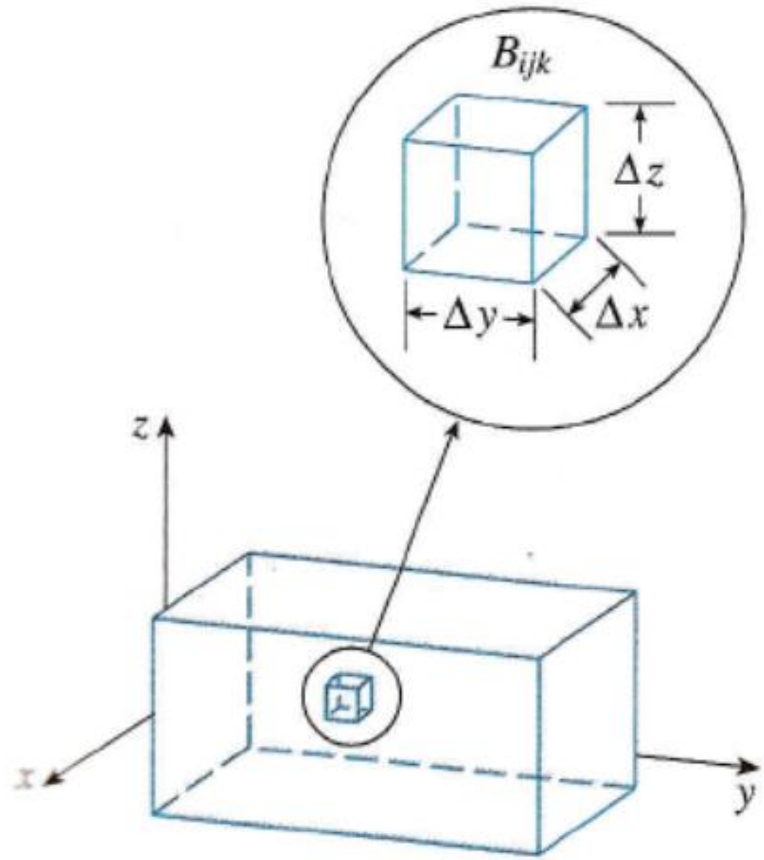
Seja *f* uma função de três variáveis e suponha que *f* seja contínua e definida numa região retangular:

$$B = \{(x, y, z) / a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d, \quad r \leq z \leq s\}$$

O primeiro passo é dividir B em subcaixas. Fazemos isso dividindo o intervalo [a,b] em *l* subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de comprimentos iguais Δx, dividindo [c,d] em *m* subintervalos de comprimentos e dividindo [r,s] em *n* subintervalos de comprimentos Δz, conforme figura:

Integral tripla





Engenharia Civil

Integral tripla

Cada subcaixa tem volume $\Delta V = \Delta x.\Delta y.\Delta z$. Assim, formamos a soma tripla de Riemann.

$$\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f\left(x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk}\right).\Delta V$$

Por analogia com a definição de integral dupla (vista em aulas anteriores) definimos a integral tripla como o limite das somas triplas de Riemann.

Integral tripla

Definição: A integral tripla de *f* sobre a caixa B é:

$$\iiint_B f(x,y,z)\,dV = \lim_{l,m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f\left(x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk}\right)\Delta V$$

se existir.

Como para integrais duplas, o método prático para calcular uma integral tripla consiste em expressá-la como uma integral iterada:

$$\iiint_B f(x,y,z)\,dV = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x,y,z)\,dx.dy.dz$$

Engenharia Civil

Integral tripla

A integral iterada do lado direito da igualdade indica que primeiro integramos em relação a x (mantendo y e z constantes), em seguida integramos em relação a y (mantendo z fixo) e finalmente em relação a z.

Observação: Existem outras ordens possíveis de integração, todas fornecendo o mesmo resultado.

Engenharia Civil

Integral tripla

Exemplos:

1) Calcule a integral tripla $\iiint_G 12xy^2z^3 dV$ na caixa retangular G definida pelas desigualdades $-1 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 3,\ 0 \leq z \leq 2.$

2) Calcule a integral tripla $\iiint_B xyz^2 dV$, onde B é a caixa retangular dada por: $B = \{(x, y, z) / 0 \leq x \leq 1, \quad -1 \leq y \leq 2, \quad 0 \leq z \leq 3\}.$

3) Calcule a integral tripla: $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_{2y}^{1+y^2} (x) dz\, dy\, dx =$