INSTITUTO FEDERAL
Sul-rio-grandense
Câmpus
Passo Fundo

EDUCAÇÃO PÚBLICA 100% GRATUITA

Análise Matricial de Estruturas

01 – Vigas e pórticos planos

ANÁLISE MATRICIAL DE SISTEMAS ESTRUTURAIS

A aplicação de métodos para análise de sistemas estruturais que envolve equações lineares, sejam equações de equilíbrio de forças (método dos deslocamentos) ou de compatibilidade de deslocamentos (método das forças), a resolução pode ocorrer com o uso da álgebra matricial que emprega vetores e matrizes.

Os sistemas estruturais reticulados são formados por uma série de elementos com dimensão finita (elementos finitos), discretizados e ligados entre si em suas extremidades por nós, rígidos ou articulados, em que se concentram todos os esforços de ligação entre os elementos.

O único sistema principal é obtido pelo engastamento de todos os nós, o que torna este método mais conveniente para programação.

É calculada a matriz de rigidez de cada elemento isolado no sistema local de coordenadas.

Se houver cargas aplicadas ao longo dos elementos, é calculado o vetor de esforços de engastamento perfeito, no sistema local.

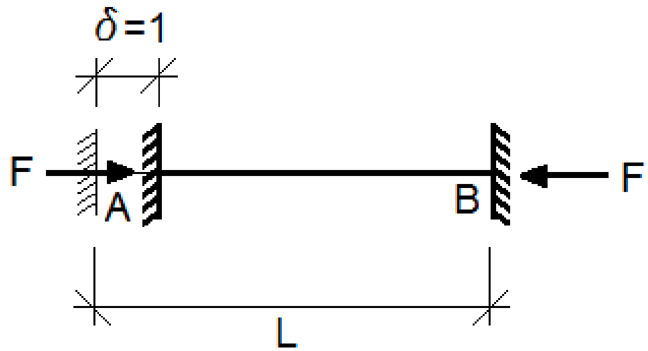
Logo, através de transformação de coordenadas, encontra-se a matriz de rigidez do elemento no sistema global.

Em seguida com a contribuição de todos os elementos será formado o sistema de equações de equilíbrio para a estrutura. Se uma estrutura tem N nós, com M graus de liberdade, o sistema resultante terá NxM equações.

Na sequencia serão impostas as condições de contorno.

Resolve-se o sistema de equações para obter o vetor de deslocamentos e os esforços no elemento no sistema local.

Matriz de rigidez de um elemento



A força F necessária e capaz de produzir tal deslocamento pode ser determinada a partir dos princípios da Resistência dos Materiais:

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

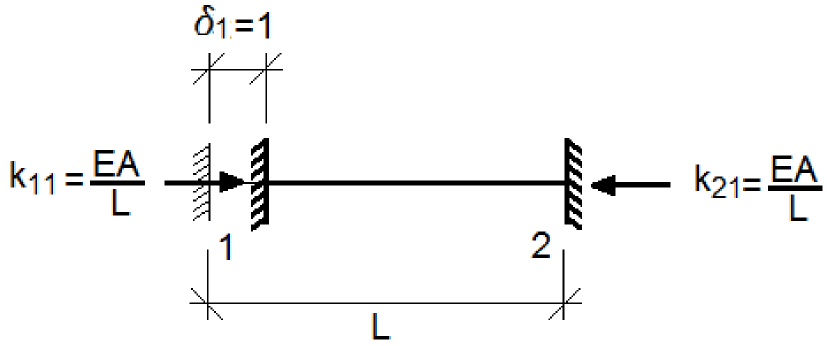
$$\varepsilon = \frac{\delta}{L}$$

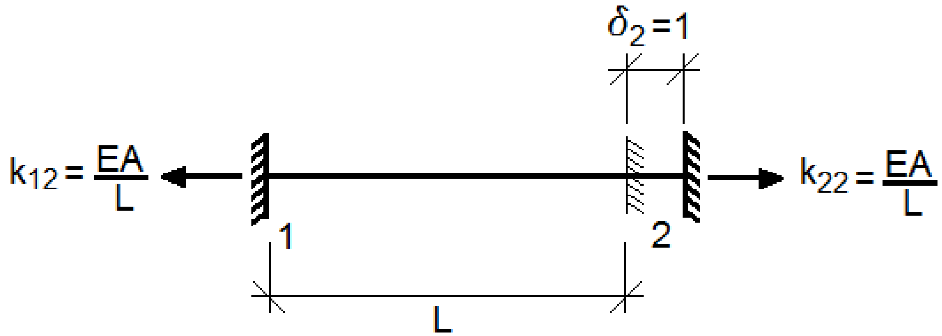
$$\sigma = E.\varepsilon$$

$$\frac{F}{A} = \frac{E.\delta}{L}$$

$$F = \frac{E.A}{L}$$

Matriz de rigidez de um elemento





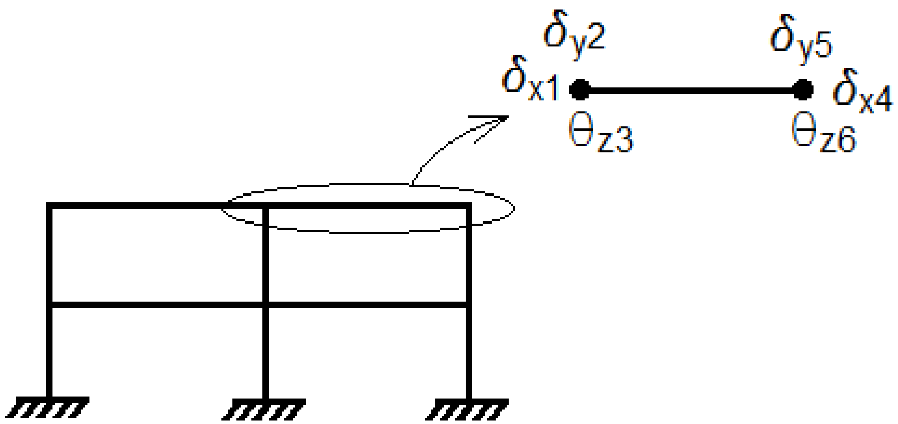
$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} \dfrac{EA}{L} & -\dfrac{EA}{L} \\ -\dfrac{EA}{L} & \dfrac{EA}{L} \end{bmatrix}$$

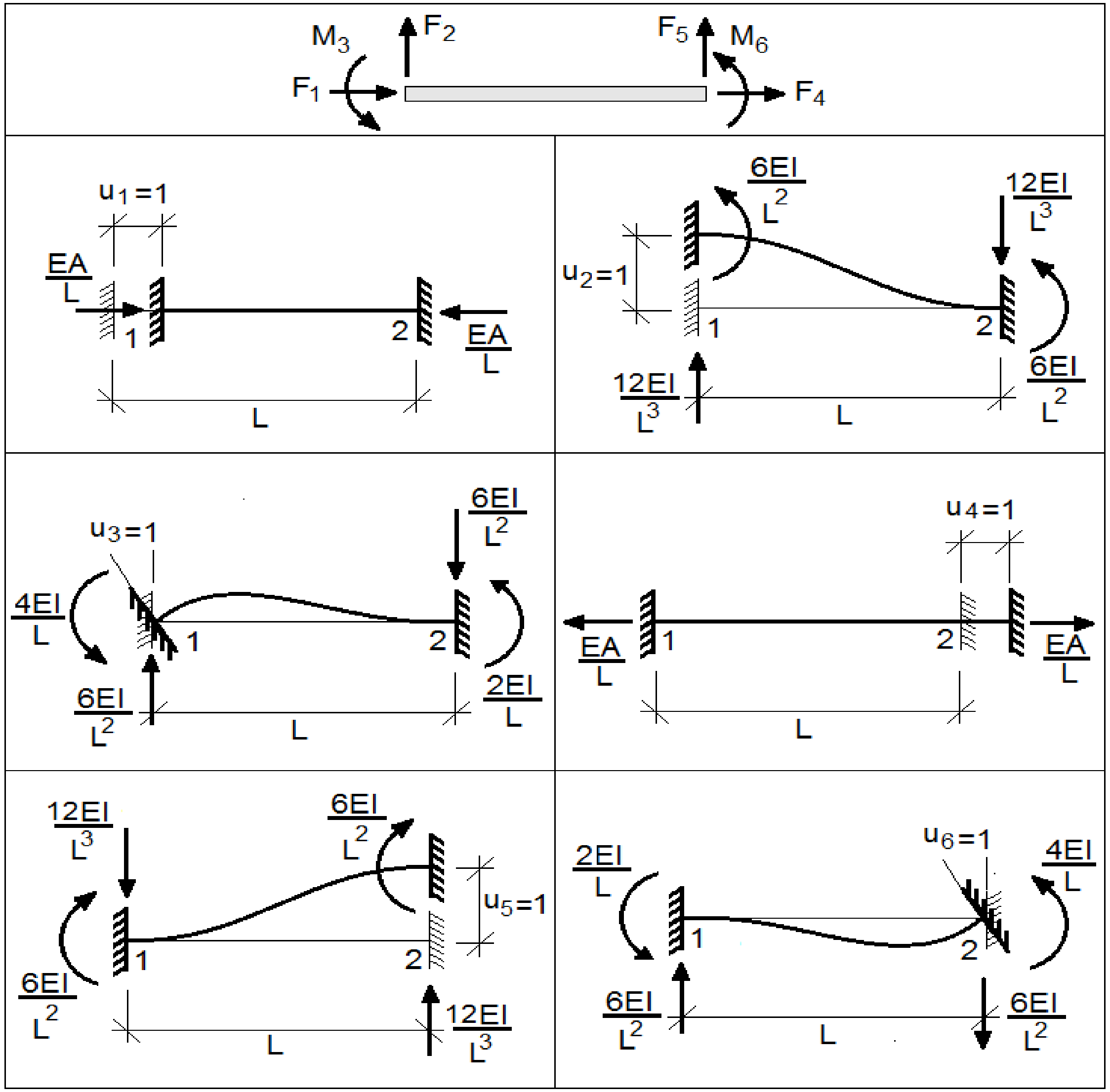
INSTITUTO FEDERAL
Sul-rio-grandense
Câmpus
Passo Fundo

Graus de Liberdade

A Figura abaixo ilustra um elemento estrutural no plano, em que cada um de seus dois nós possui três graus de liberdade ou deslocamentos possíveis. Como um elemento finito de barra possui dois nós, seu número de graus de liberdade é igual a seis.



Matriz de rigidez de um elemento



Matriz de rigidez de um elemento

$$K = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

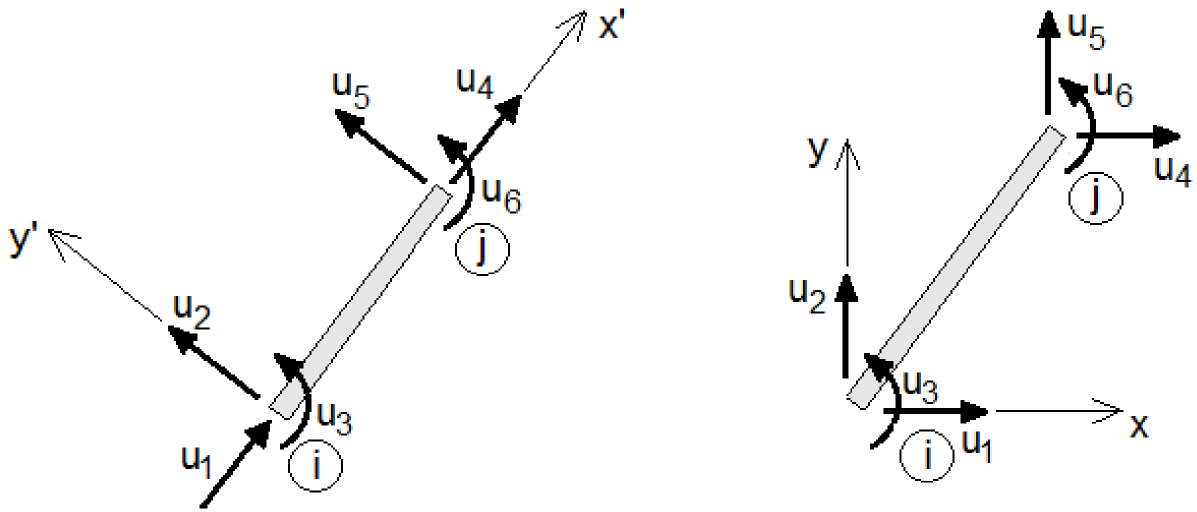
Matriz de rigidez de um elemento

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ M_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ M_6 \end{Bmatrix}$$

INSTITUTO FEDERAL
Sul-rio-grandense
Câmpus
Passo Fundo

Matriz de Rotação

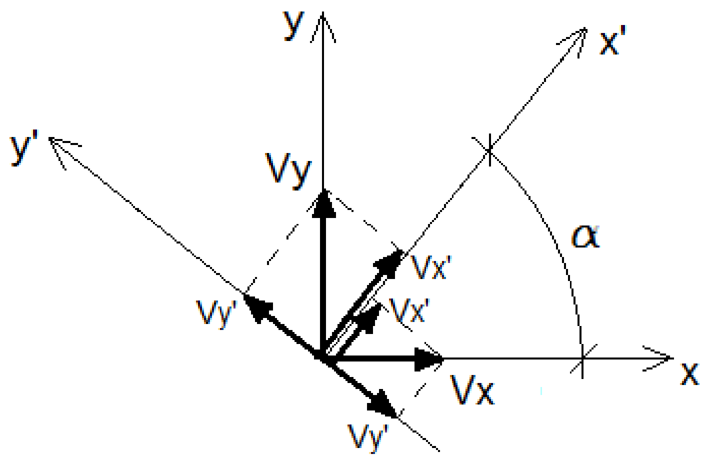
A grande maioria dos sistemas estruturais é composta pela combinação de vários elementos estruturais, dispostos em direções diferentes uns aos outros.
Para resolver essa inconsistência uma transformação é necessária, ou, em outras palavras, é necessário rotacionar as matrizes de rigidez de cada elemento para um sistema de coordenadas comum para todos os elementos que constituem o sistema estrutural.

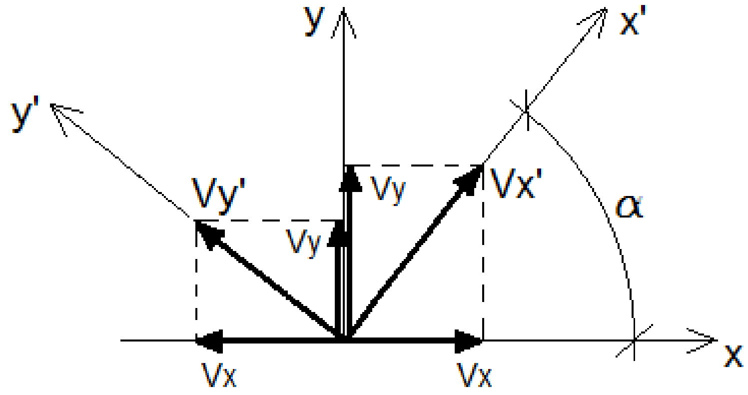


Sistema Local
(a)

Sistema Global
(b)

Matriz de Rotação





$$\begin{cases} Vx' = Vx.\cos\alpha + Vy.sen\alpha \\ Vy' = -Vx.sen\alpha + Vy.\cos\alpha \\ Vz' = Vz \end{cases}$$

$$\begin{cases} Vx = Vx'.\cos\alpha - Vy'.sen\alpha \\ Vy = Vx.'sen\alpha + Vy'.\cos\alpha \\ Vz = Vz' \end{cases}$$

INSTITUTO FEDERAL
Sul-rio-grandense
Câmpus
Passo Fundo

Transformações

$$R_{G\to L} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & sen\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -sen\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & sen\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -sen\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\{u_L\} = [R].\{u_G\} \qquad \{f_L\} = [R].\{f_G\}$$

$$[K_G] = [R]^T.[K_L].[R]$$

$$\{u_G\} = [R]^T.\{u_L\} \qquad \{f_G\} = [R]^T.\{f_L\}$$

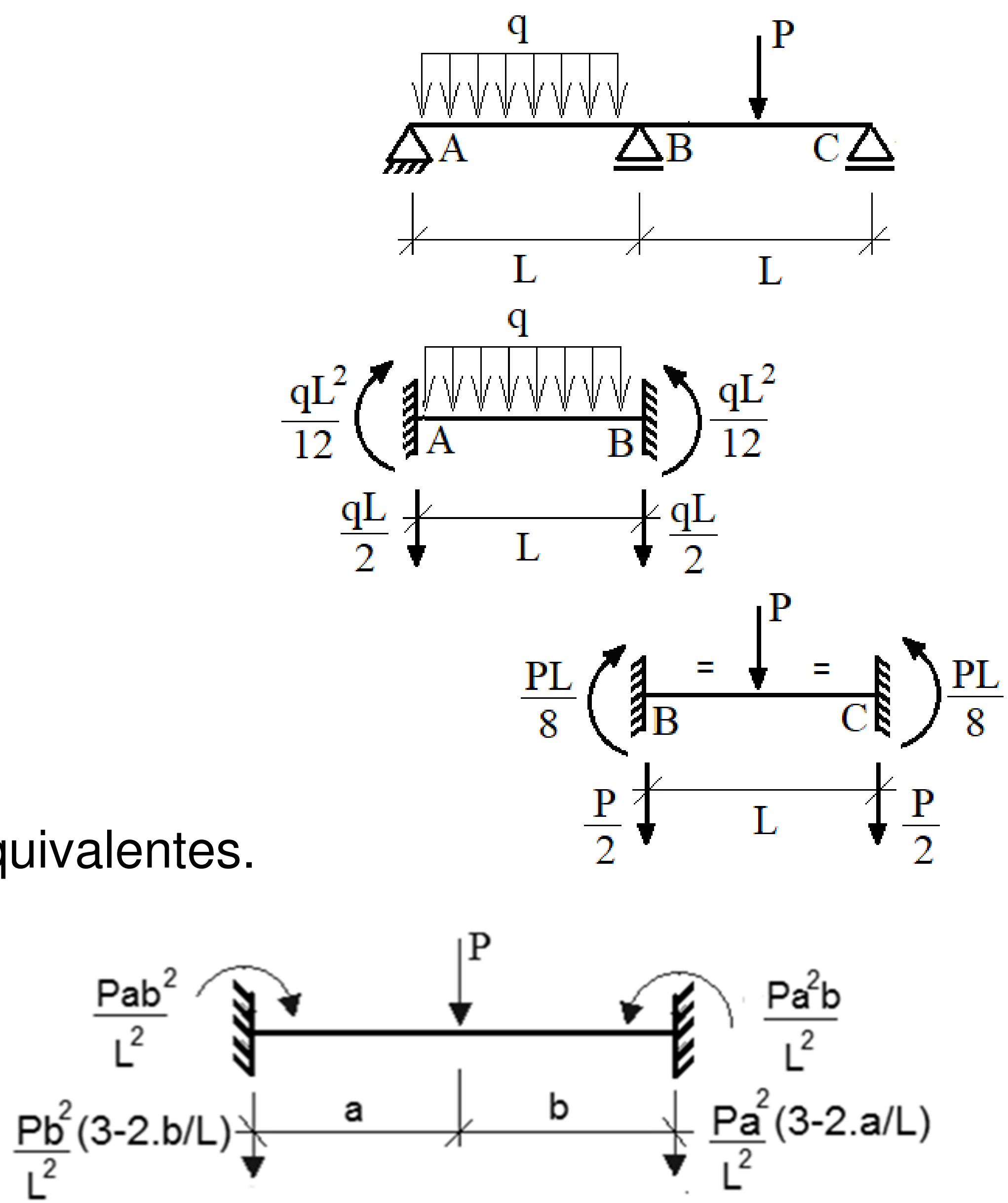
Vetor de Ações Nodais

$$f^* = f_G + \sum ae$$

f^* : vetor de ações nodais;

f_G : ações aplicadas nos nós;

$\sum ae$: somatória das ações nodais equivalentes.



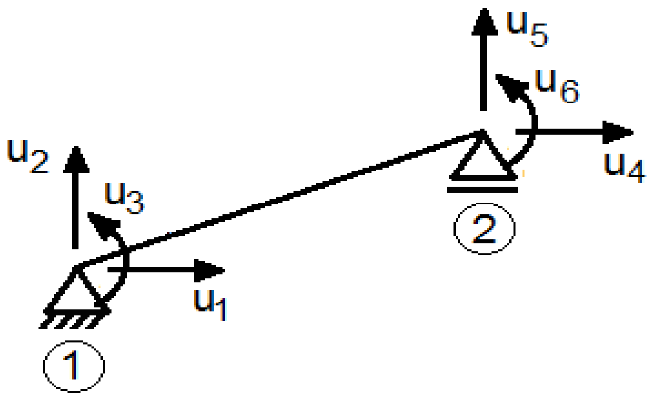
INSTITUTO FEDERAL
Sul-rio-grandense
Câmpus
Passo Fundo

Prof. Dr. Rodrigo Bordignon

Condições de Contorno

Alguns deslocamentos, cujos valores são conhecidos, são denominados como condições geométricas de contorno.

Uma das técnicas empregadas é conhecida como técnica de zeros e um.



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} & k_{34} & 0 & k_{36} \\ 0 & 0 & k_{43} & k_{44} & 0 & k_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k_{63} & k_{64} & 0 & k_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_3 \\ u_4 \\ 0 \\ u_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_3 \\ F_4 \\ 0 \\ M_6 \end{Bmatrix}$$

INSTITUTO FEDERAL Sul-rio-grandense Câmpus Passo Fundo

Esforços Solicitantes Nodais

$$\{F_{iL}\} = [K_{iL}] \cdot \{u_L\} + \{a_{LEP}\}$$

F_{iL}: vetor de esforços solicitantes nodais;

K_{iL}: matriz de rigidez local do elemento;

u_L: vetor de deslocamentos nodais do elemento, referenciado ao sistema local de coordenadas;

a_{LEP}: vetor de ações locais de engastamento perfeito.

Etapas para Aplicação do Método

1 – Definição do modelo do sistema estrutural;

2 – Cálculo da matriz de rigidez local de cada elemento e transformação para o sistema global de coordenadas:

$$[K_G] = [R]^T . [K_L] . [R]$$

3 – Montagem do vetor de ações nodais no referencial global:

$$f^* = f_G + \sum ae$$

INSTITUTO FEDERAL
Sul-rio-grandense
Câmpus
Passo Fundo

Etapas para Aplicação do Método

4 – Introdução das condições de contorno;

5 – Determinação das incógnitas (deslocamentos) através da solução do sistema de equações de equilíbrio:

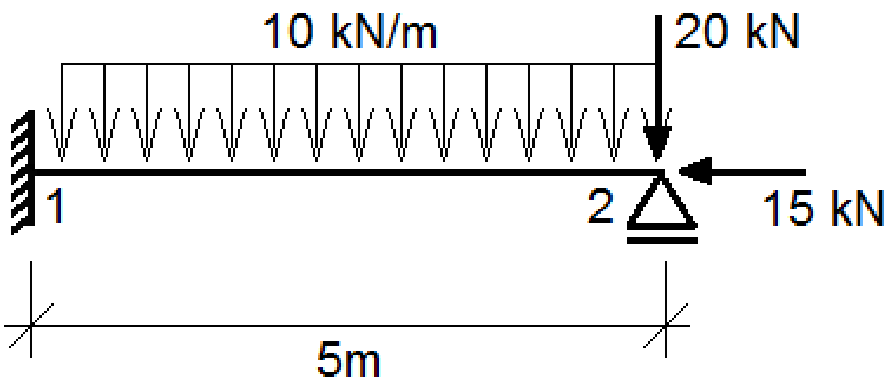
$$[K^*]\{u^*\} = \{f^*\}$$

6 – Cálculo dos esforços locais nos nós extremos de cada elemento:

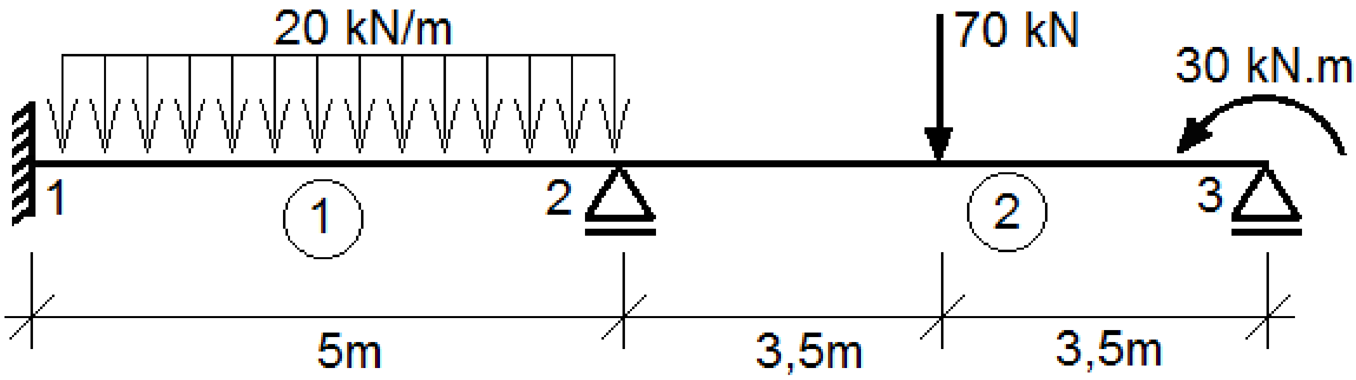
$$\{F_{iL}\} = [K_{iL}].\{u_L\} + \{a_{LEP}\}$$

INSTITUTO FEDERAL Sul-rio-grandense
Câmpus Passo Fundo

Exemplo 01 – A viga abaixo foi construída em madeira cujo módulo de elasticidade é de 10 GPa e a seção transversal de 30 x 50 cm. Aplicando o método da rigidez direta de forma matricial, calcular as reações de apoios e traçar os diagramas de esforços internos correspondentes.

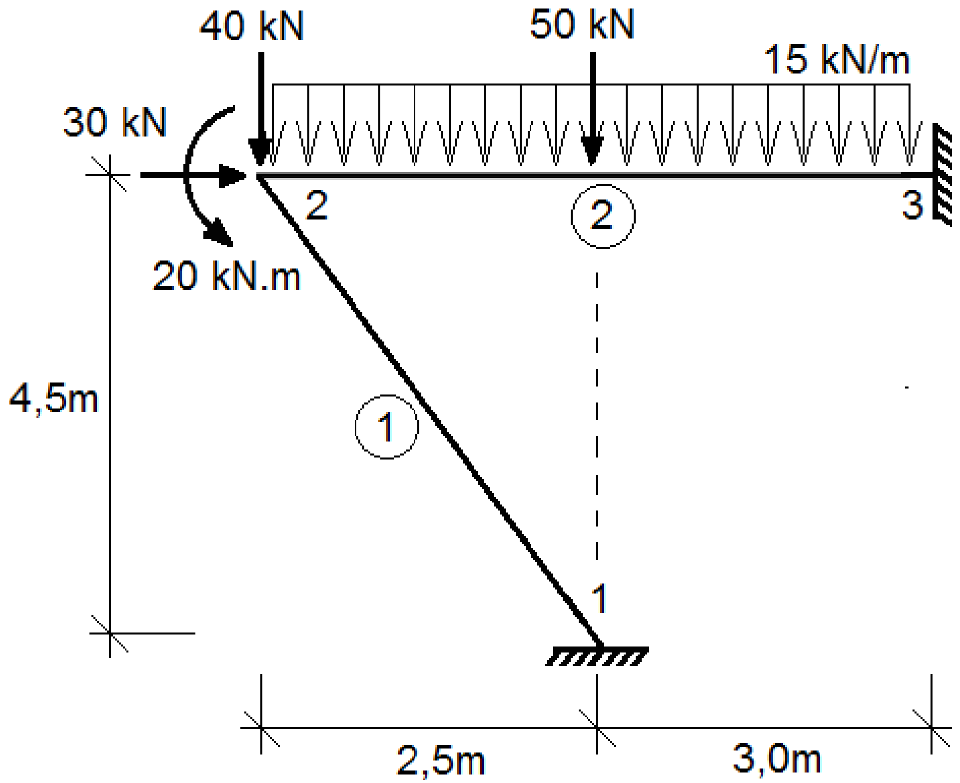


Exemplo 02 – A viga abaixo será construída com perfil I em aço e solicitada ao carregamento ilustrado. Considerando o módulo de elasticidade do aço 200 GPa e a seção transversal com área de 105 cm^2 e momento de inércia de 47569 cm^4, determinar as reações de apoio e traçar os diagramas de esforços correspondentes.



INSTITUTO FEDERAL
Sul-rio-grandense
Câmpus Passo Fundo

<u>Exemplo 03</u> – O pórtico seguinte será construído em concreto armado (E= 25 GPa) e seus elementos terão seção transversal de 20x60 cm. Aplicando o método da rigidez direta de forma matricial, calcular as reações de apoios e traçar os diagramas de esforços correspondentes.



INSTITUTO FEDERAL Sul-rio-grandense Câmpus Passo Fundo

INSTITUTO FEDERAL
Sul-rio-grandense
Câmpus
Passo Fundo

EDUCAÇÃO PÚBLICA 100% GRATUITA

MUITO OBRIGADO

Prof. Rodrigo Bordignon
Engenheiro Civil, Dr.

www.ifsul.edu.br
rodrigobordignon@ifsul.edu.br