69. Construa os gráficos das funções em $\mathbb{R}$ definidas por:

a) $f(x) = \frac{1}{2} \cdot 3^x$

b) $f(x) = 0{,}1 \cdot 2^{2x-3}$

c) $f(x) = \frac{1}{5} \cdot 3^{2x-1}$

d) $f(x) = 3 \cdot 2^{\frac{x+1}{2}}$

V. Equações exponenciais

34. Definição

Equações exponenciais são equações com incógnita no expoente.

Exemplos:

$$2^x = 64,\ (\sqrt{3})^x = \sqrt[3]{81},\ 4^x - 2^x = 2$$

Existem dois métodos fundamentais para resolução das equações exponenciais.

Faremos neste capítulo a apresentação do primeiro método; o segundo será apresentado quando do estudo de logaritmos.

35. Método da redução a uma base comum

Este método, como o próprio nome já diz, será aplicado quando ambos os membros da equação, com as transformações convenientes baseadas nas propriedades de potências, forem redutíveis a potências de mesma base *a* $(0 < a \neq 1)$. Pelo fato de a função exponencial $f(x) = a^x$ ser injetora, podemos concluir que potências iguais e de mesma base têm os expoentes iguais, isto é:

$$\boxed{a^b = a^c \Leftrightarrow b = c \ (0 < a \neq 1)}$$

EXERCÍCIOS

70. Resolva as seguintes equações exponenciais:

a) $2^x = 64$

b) $8^x = \frac{1}{32}$

c) $(\sqrt{3})^x = \sqrt[3]{81}$

Solução

a) $2^x = 64 \Leftrightarrow 2^x = 2^6 \Leftrightarrow x = 6$

$S = \{6\}$

b) $8^x = \frac{1}{32} \Leftrightarrow (2^3)^x = \frac{1}{2^5} \Leftrightarrow 2^{3x} = 2^{-5} \Leftrightarrow 3x = -5 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{3}$

$S = \left\{-\frac{5}{3}\right\}$

c) $(\sqrt{3})^x = \sqrt[3]{81} \Leftrightarrow \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^x = \sqrt[3]{3^4} \Leftrightarrow 3^{\frac{x}{2}} = 3^{\frac{4}{3}} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x = \frac{8}{3}$

$S = \left\{\frac{8}{3}\right\}$

71. Resolva as seguintes equações exponenciais:

a) $2^x = 128$

b) $3^x = 243$

c) $2^x = \frac{1}{16}$

d) $\left(\frac{1}{5}\right)^x = 125$

e) $(\sqrt[3]{2})^x = 8$

f) $(\sqrt[4]{3})^x = \sqrt[3]{9}$

g) $9^x = 27$

h) $4^x = \frac{1}{8}$

i) $\left(\frac{1}{125}\right)^x = 25$

j) $(\sqrt[5]{4})^x = \frac{1}{\sqrt{8}}$

k) $100^x = 0{,}001$

l) $8^x = 0{,}25$

m) $125^x = 0{,}04$

n) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 2{,}25$

72. Resolva as seguintes equações exponenciais:

a) $2^{3x-1} = 32$

b) $7^{4x+3} = 49$

c) $11^{2x+5} = 1$

d) $2^{x^2-x-16} = 16$

e) $3^{x^2+2x} = 243$

f) $5^{2x^2+3x-2} = 1$

g) $81^{1-3x} = 27$

h) $7^{3x+4} = 49^{2x-3}$

i) $5^{3x-1} = \left(\frac{1}{25}\right)^{2x+3}$

j) $(\sqrt{2})^{3x-1} = (\sqrt[3]{16})^{2x-1}$

k) $8^{2x+1} = \sqrt[3]{4^{x-1}}$

l) $4^{x^2-1} = 8^x$

m) $27^{x^2+1} = 9^{5x}$

n) $8^{x^2-x} = 4^{x+1}$

73. Resolva a equação $4^{x^2+4x} = 4^{12}$.

74. Determine os valores de x que satisfazem a equação $100 \cdot 10^x = \sqrt[x]{1\,000^5}$.

75. Resolva as equações exponenciais abaixo:

a) $(2^x)^{x-1} = 4$

b) $3^{2x-1} \cdot 9^{3x+4} = 27^{x+1}$

c) $\sqrt{5^{x-2}} \cdot \sqrt[x]{25^{2x-5}} - \sqrt[2x]{5^{3x-2}} = 0$

Solução

a) $(2^x)^{x-1} = 4 \Leftrightarrow 2^{x^2-x} = 2^2 \Leftrightarrow x^2 - x = 2 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -1$
$S = \{2, -1\}$

b) $3^{2x-1} \cdot 9^{3x+4} = 27^{x+1} \Leftrightarrow 3^{2x-1} \cdot (3^2)^{3x+4} = (3^3)^{x+1} \Leftrightarrow 3^{2x-1} \cdot 3^{6x+8} = 3^{3x+3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3^{8x+7} = 3^{3x+3} \Leftrightarrow 8x + 7 = 3x + 3 \Leftrightarrow x = -\dfrac{4}{5}$

$S = \left\{-\dfrac{4}{5}\right\}$

c) $\sqrt{5^{x-2}} \cdot \sqrt[x]{25^{2x-5}} = \sqrt[2x]{5^{3x-2}} \Leftrightarrow 5^{\frac{x-2}{2}} \cdot (5^2)^{\frac{2x-5}{x}} = 5^{\frac{3x-2}{2x}} \Leftrightarrow 5^{\frac{x-2}{2} + \frac{4x-10}{x}} =$

$= 5^{\frac{3x-2}{2x}} \Leftrightarrow \dfrac{x-2}{2} + \dfrac{4x-10}{x} = \dfrac{3x-2}{2x} \Leftrightarrow x^2 + 3x - 18 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -6$ (não serve, pois $x > 0$)

$S = \{3\}$

76. Resolva as seguintes equações exponenciais:

a) $(2^x)^{x+4} = 32$

b) $(9^{x+1})^{x-1} = 3^{x^2+x+4}$

c) $2^{3x-1} \cdot 4^{2x+3} = 8^{3-x}$

d) $(3^{2x-7})^3 : 9^{x+1} = (3^{3x-1})^4$

e) $2^{3x+2} : 8^{2x-7} = 4^{x-1}$

f) $\dfrac{3^{x+2} \cdot 9^x}{243^{5x+1}} = \dfrac{81^{2x}}{27^{3-4x}}$

g) $\sqrt[x+4]{2^{3x-8}} = 2^{x-5}$

h) $8^{3x} = \sqrt[3]{32^x} : 4^{x-1}$

i) $\sqrt[x-1]{\sqrt[3]{2^{3x-1}}} - \sqrt[3x-7]{8^{x-3}} = 0$

j) $\sqrt{8^{x-1}} \cdot \sqrt[x+1]{4^{2x-3}} = \sqrt[6]{2^{5x+3}}$

77. Determine os valores de x que satisfazem a equação $(4^{3-x})^{2-x} = 1$.

78. Resolva a equação exponencial: $2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} - 2^{x+2} + 2^{x+3} = 120$.

Solução

Resolvemos colocando 2^{x-1} em evidência:

$2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} - 2^{x+2} + 2^{x+3} = 120 \Leftrightarrow 2^{x-1}(1 + 2 + 2^2 - 2^3 + 2^4) =$
$= 120 \Leftrightarrow 2^{x-1} \cdot 15 = 120 \Leftrightarrow 2^{x-1} = 8 \Leftrightarrow 2^{x-1} = 2^3 \Leftrightarrow x - 1 = 3 \Leftrightarrow x = 4$,
$S = \{4\}$

79. Resolva as seguintes equações exponenciais:

a) $3^{x-1} - 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 306$

b) $5^{x-2} - 5^x + 5^{x+1} = 505$

c) $2^{3x} + 2^{3x+1} + 2^{3x+2} + 2^{3x+3} = 240$

d) $5^{4x-1} - 5^{4x} - 5^{4x+1} + 5^{4x+2} = 480$

e) $3 \cdot 2^x - 5 \cdot 2^{x+1} + 5 \cdot 2^{x+3} - 2^{x+5} = 2$

f) $2 \cdot 4^{x+2} - 5 \cdot 4^{x+1} - 3 \cdot 2^{2x+1} - 4^x = 20$

80. Resolva as seguintes equações exponenciais:

a) $4^x - 2^x = 56$

b) $4^{x+1} - 9 \cdot 2^x + 2 = 0$

Solução

a) $4^x - 2^x = 56 \Leftrightarrow (2^2)^x - 2^x - 56 = 0 \Leftrightarrow (2^x)^2 - 2^x - 56 = 0$
Empregando uma incógnita auxiliar, isto é, fazendo $2^x = y$, temos:
$y^2 - y - 56 = 0 \Leftrightarrow y = 8$ ou $y = -7$
Observemos que $y = -7$ não convém, pois $y = 2^x > 0$.
De $y = 8$, temos: $2^x = 8 \Leftrightarrow 2^x = 2^3 \Leftrightarrow x = 3$.
$S = \{3\}$

b) $4^{x+1} - 9 \cdot 2^x + 2 = 0 \Leftrightarrow 4 \cdot 4^x - 9 \cdot 2^x + 2 = 0 \Leftrightarrow 4 \cdot (2^x)^2 - 9 \cdot 2^x + 2 = 0$
Fazendo $2^x = y$, temos:

$4y^2 - 9y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = 2$ ou $y = \frac{1}{4}$

mas $y = 2^x$, então:

$2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1$ ou $2^x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = -2$

$S = \{1, -2\}$

81. Resolva as seguintes equações exponenciais:

a) $4^x - 2^x - 2 = 0$

b) $9^x + 3^x = 90$

c) $4^x - 20 \cdot 2^x + 64 = 0$

d) $4^x + 4 = 5 \cdot 2^x$

e) $9^x + 3^{x+1} = 4$

f) $5^{2x} + 5^x + 6 = 0$

g) $2^{2x} + 2^{x+1} = 80$

h) $10^{2x-1} - 11 \cdot 10^{x-1} + 1 = 0$

i) $4^{x+1} + 4^{3-x} = 257$

j) $5 \cdot 2^{2x} - 4^{2x-\frac{1}{2}} - 8 = 0$

82. Resolva a equação $25^{\sqrt{x}} - 124 \cdot 5^{\sqrt{x}} = 125$.

83. Calcule o produto das soluções da equação $4^{x^2+2} - 3 \cdot 2^{x^2+3} = 160$.

84. Resolva as seguintes equações exponenciais:

a) $3^x - \dfrac{15}{3^{x-1}} + 3^{x-3} = \dfrac{23}{3^{x-2}}$

b) $2^{x+1} + 2^{x-2} - \dfrac{3}{2^{x-1}} = \dfrac{30}{2^x}$

c) $16^{2x+3} - 16^{2x+1} = 2^{8x+12} - 2^{6x+5}$

85. Resolva a equação exponencial:

$$3^{\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{81}{3^{\left(x + \frac{1}{x}\right)}}$$

86. Determine o número de soluções distintas da equação $2^x - 2^{-x} = k$, para k real.

87. Resolva a equação exponencial:

$$\frac{3^x + 3^{-x}}{3^x - 3^{-x}} = 2$$

88. Resolva a equação exponencial:

$$4^x - 3^{x - \frac{1}{2}} = 3^{x + \frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$$

89. Resolva a equação:

$$3^{x-1} - \frac{5}{3^{x+1}} = 4 \cdot 3^{1-3x}$$

90. Resolva a equação:

$$8^x - 3 \cdot 4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 8 = 0$$