20. Corolário

A soma dos *n* primeiros termos de uma P.G. é:

$$\boxed{S_n = \frac{a_n q - a_1}{q - 1}} \qquad (q \neq 1)$$

Demonstração:

$$S_n = \frac{a_1 q^n - a_1}{q - 1} = \frac{(a_1 q^{n-1})q - a_1}{q - 1} = \frac{a_n q - a_1}{q - 1}$$

21. Exemplos:

1º) Calcular a soma dos 10 termos iniciais da P.G. (1, 3, 9, 27, ...).

$$S_{10} = \frac{a_1 q^{10} - a_1}{q - 1} = \frac{1 \cdot 3^{10} - 1}{3 - 1} = \frac{59\,049 - 1}{2} = 29\,524$$

2º) Calcular a soma das potências de 5 com expoentes inteiros consecutivos, desde 5^2 até 5^{26}.

Trata-se da P.G. $(5^2, 5^3, 5^4, \ldots, 5^{26})$.

Temos:

$$S = \frac{a_n q - a_1}{q - 1} = \frac{5^{26} \cdot 5 - 5^2}{5 - 1} = \frac{5^{27} - 5^2}{4}.$$

EXERCÍCIOS

144. Calcule a soma das 10 parcelas iniciais da série $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$.

145. Calcule a soma dos 20 termos iniciais da série 1 + 3 + 9 + 27 + ...

146. Numa progressão geométrica de 4 termos, a soma dos termos de ordem par é 10 e a soma dos termos de ordem ímpar é 5. Determine o 4º termo dessa progressão.

147. Em um triângulo, a medida da base, a medida da altura e a medida da área formam, nessa ordem, uma P.G. de razão 8. Calcule a medida da base.

148. Se $S_3 = 21$ e $S_4 = 45$ são, respectivamente, as somas dos três e quatro primeiros termos de uma progressão geométrica cujo termo inicial é 3, determine a soma dos cinco primeiros termos da progressão.

149. Dois conjuntos, A e B, são tais que o número de elementos de $A - B$ é 50, o número de elementos de $A \cup B$ é 62 e o número de elementos de $A - B$, $A \cap B$ e $B - A$ estão em progressão geométrica. Determine o número de elementos do conjunto $A \cap B$.

150. Os números *x, y, z* formam, nessa ordem, uma P.A. de soma 15. Por outro lado, os números x, $y + 1$, $z + 5$ formam, nessa ordem, uma P.G. de soma 21. Sendo $0 \leqslant x \leqslant 10$, calcule o valor de 3z.

151. Seja $a > 0$ o 1º termo de uma progressão aritmética de razão *r* e também de uma progressão geométrica de razão $q = 2r\dfrac{\sqrt{3}}{3a}$. Determine a relação entre *a* e *r* para que o 3º termo da progressão geométrica coincida com a soma dos 3 primeiros termos da progressão aritmética.

152. Se *a* e *q* são números reais não nulos, calcule a soma dos *n* primeiros termos da P.G.: $a, aq^2, aq^4, aq^6, \ldots$.

153. Partindo de um quadrado Q_1, cujo lado mede *a* metros, consideremos os quadrados $Q_2, Q_3, Q_4, \ldots, Q_n$ tais que os vértices de cada quadrado sejam os pontos médios dos lados do quadrado anterior. Calcule, então, a soma das áreas dos quadrados $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots, Q_n$.

154. Quantos termos da P.G. (1, 3, 9, 27, ...) devem ser somados para que o resultado dê 3 280?

155. Determine *n* tal que $\sum\limits_{i=3}^{n} 2^i = 4\,088$.

156. A soma de seis elementos em P.G. de razão 2 é 1 197. Qual é o 1º termo da P.G.?

157. Prove que em toda P.G. $S_n^2 + S_{2n}^2 = S_n \cdot (S_{2n} + S_{3n})$.

158. Determine onze números em P.G., sabendo que a soma dos dez primeiros é 3 069 e a soma dos dez últimos é 6 138.

159. Uma P.G. finita tem *n* termos. Sendo S a soma dos termos, S' a soma de seus inversos e P o produto dos elementos, prove que $P^2 = \left(\dfrac{S}{S'}\right)^n$.

124. não

125. 131 127

126. 146 410

127. 2,85 ℓ

128. 248 832

129. $a_1 = \frac{10}{273}$; $q = 3$

130. $n = 12$

131. Demonstração

132. Demonstração

133. Demonstração

134. $q = \frac{1}{2}$

135. $a_6 = -96$

136. 6 meios geométricos

137. 4 meios geométricos

138. $x = a^{\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{1}{3}}$; $y = a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{2}{3}}$

139. a) 2^{45}
b) $2^{20} \cdot 3^{190}$
c) $3^{25} \cdot 2^{300}$
d) $-2^{2\,145}$
e) 1
f) $a^{5\,050}$

140. a) $S = \log_2\left[a^{n+1} \cdot 2^{\frac{n(n+1)}{2}}\right]$
b) $a = 2^{1-\frac{n}{2}}$

141. $n = 20$

142. $P_{101} = -1$

143. $P_{55} = 2^{756} \cdot 3^{784}$

144. $S_{10} = \frac{1\,023}{512}$

145. $S_{20} = \frac{3^{20} - 1}{2}$

146. $a_4 = 8$

147. base $= 16$

148. $S_5 = 93$

149. $n(A \cap B) = 10$

150. $3z = 21$

151. $r = 3a$ ou $r = -\frac{3}{4}a \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{a}{r} = \frac{1}{3}$ ou $\frac{a}{r} = -\frac{4}{3}$

152. $S = \frac{a\left(q^{2n} - 1\right)}{q^2 - 1}$

153. $S = \frac{a^2\left(2^n - 1\right)}{2^{n-1}}$

154. 8

155. $n = 11$

156. $n_1 = 19$

157. Demonstração

158. (3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, 768, 1 536, 3 072)

159. Demonstração

160. a) $\frac{5}{2}$ b) $-\frac{9}{2}$ c) $\frac{25}{6}$ d) $-\frac{8}{15}$

161. $S = 4$

162. $\frac{4a}{5}$

163. $S = \frac{21}{25}$